Capítulo 3

Ortogonalidade e Projeção Ortogonal

Norma e distância

Exercícios 29.

1. Calcule as normas e indique os versores dos seguintes vectores.

   (a) $(1,-1,2)$

   (b) $(-1,0,\pi,0)$

   (c) $(5,0,1,0,1,3)$

   a) $\sqrt{6}$ e $\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{-1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$ **b)** $\sqrt{1+\pi^2}$ e $\left(\frac{-1}{\sqrt{1+\pi^2}},0,\frac{\pi}{\sqrt{1+\pi^2}},0\right)$ **c)** 6 e $\left(\frac{5}{6},0,\frac{1}{6},0,\frac{1}{6},\frac{1}{2}\right)$

2. Calcule as distâncias entre os seguintes pares de vectores.

   (a) $(1,-1,2)$ e $(0,-1,0)$.

   (b) $(-1,0,2,0)$ e $(1,0,0,1)$.

   (c) $(5,0,1,0,1,3)$ e $(-1,2,0,1,1,0)$.

   a) $\sqrt{5}$ **b)** 3 **c)** $\sqrt{51}$

Exercício 30. Determine os vetores de norma $\sqrt{21}$ que são solução do sistema linear $Ax=b$ com $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ e $b=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

$(0,1,2,4)$ e $\left(-\frac{10}{3},-\frac{7}{3},2,\frac{2}{3}\right)$

ORTOGONALIDADE E COMPLEMENTO ORTOGONAL

Exercício 31. Considere $v_1 = (1,0,1)$ e $v_2 = (1,1,-1)$.

1. Determine o conjunto dos vectores de $\mathbb{R}^3$ simultaneamente ortogonais a v_1 e v_2.

2. Indique um vetor unitário de $\mathbb{R}^3$ simultaneamente ortogonal a v_1 e v_2.

a) $\{(-x_3, 2x_3, x_3) : x_3 \in \mathbb{R}\} = \langle(-1,2,1)\rangle$
b) $\text{vers}(-1,2,1) = \left(\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$, ou, em alternativa, $-\text{vers}(-1,2,1)) = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}\right)$.

Exercícios 32.

1. Justifique que $(2,1,1,-1)$ é ortogonal ao espaço gerado pelos vetores,

$$(1,0,0,2),\ (-1,0,2,0),\ (-1,2,0,0),\ (1,1,1,4).$$

2. Verifique que $(4,2,-1)$ é ortogonal ao espaço das colunas da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Exercícios 33.

1. Determine os complementos ortogonais do espaço das colunas de cada uma das seguintes matrizes (no caso das alíneas a), b) e c) interprete ainda geometricamente o resultado obtido).

(a) $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) $\{(x_1, x_2) : x_1 = 2\,x_2,\ x_2 \in \mathbb{R}\} = \langle(2,1)\rangle$ que define a reta de $\mathbb{R}^2$ que passa na origem com vetor diretor $(2,1)$ e é perpendicular à reta que passa na origem com vetor diretor $(1,-2)$, definida pelo espaço de colunas da matriz.
(b) $\{(x_1, x_2, x_3) : x_1 = -2\,x_3,\ x_2 = -\frac{3}{2}\,x_3,\ x_3 \in \mathbb{R}\} = \langle(-4,-3,2)\rangle$ que define a reta de $\mathbb{R}^3$ que passa na origem com vetor diretor $(-4,-3,2)$ e é perpendicular ao plano que passa na origem com vetores diretores $(1,0,2)$ e $(-1,2,1)$, definido pelo espaço de colunas da matriz.

(c) $(\mathbb{R}^3)^\perp = \{\vec{0}\}$ (o complemento ortogonal do subespaço maximal de $\mathbb{R}^3$ é o subespaço minimal de $\mathbb{R}^3$).
(d) $\{(x_1,x_2,x_3,x_4) : x_1 = -2\,x_2 - 3\,x_3 - 4\,x_4,\ x_2 \in \mathbb{R},\ x_3 \in \mathbb{R},\ x_4 \in \mathbb{R}\} =$
$\langle (-2,1,0,0),(-3,0,1,0),(-4,0,0,1)\rangle$ que define o hiperplano de $\mathbb{R}^4$.
(e) $\{(x_1,x_2,x_3,x_4) : x_1 = -3\,x_3 + 3\,x_4,\ x_2 = -2\,x_3 + 2\,x_4,\ x_3 \in \mathbb{R},\ x_4 \in \mathbb{R}\} =$
$\langle (-3,-2,1,0),(3,2,0,1)\rangle$.

2. Determine os complementos ortogonais dos subespaços gerados pelos conjuntos de vetores $\{(1,2,2,1),(1,0,2,0)\}$ e $\{(1,1,2,-1)\}$.

   $\langle (1,2,2,1),(1,0,2,0)\rangle^\perp = \langle (-2,0,1,0),(0,-1,0,2)\rangle$
   $\langle (1,1,2,-1)\rangle^\perp = \langle (-1,1,0,0),(-2,0,1,0),(1,0,0,1)\rangle$.

3. Calcule a dimensão e indique uma base do complemento ortogonal de cada um dos seguintes subespaços gerados.

   (a) $\big\langle (1,1)\big\rangle$.
   (b) $\big\langle (1,1,3),(1,1,2),(0,0,1)\big\rangle$.
   (c) $\big\langle (1,1,0,0),(0,2,4,5)\big\rangle$.
   (d) $\big\langle (2,2,1,0),(2,4,0,1),(4,-2,1,-1),(8,4,2,0)\big\rangle$.

   (a) A dimensão é 1 e uma possível base é $\{(-1,1)\}$.
   (b) A dimensão é 1 e uma possível base é $\{(-1,1,0)\}$.
   (c) A dimensão é 2 e uma possível base é $\{(2,-2,1,0),(5,-5,0,2)\}$.
   (d) A dimensão é 1 e uma possível base é $\{(0,-1,2,4)\}$.

4. Para cada subespaço da alínea anterior indique uma base de $\mathbb{R}^n$, com n conveniente, que seja constituída por vetores desse subespaço e do seu complemento ortogonal.

   a) Uma possível base de $\mathbb{R}^2$ é $\{(1,1),(-1,1)\}$,
   b) Uma possível base $\mathbb{R}^3$ é $\{(1,1,3),(1,1,2),(-1,1,0)\}$,
   c) Uma possível base de $\mathbb{R}^4$ é $\{(1,1,0,0),(0,2,4,5),(2,-2,1,0),(5,-5,0,2)\}$,
   c) Uma possível base de $\mathbb{R}^4$ é $\{(2,2,1,0),(2,4,0,1),(4,-2,1,-1),(0,-1,2,4)\}$.

PROJEÇÃO ORTOGONAL

Exercício 34. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e o vetor $b = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Justifique por definição que $\text{proj}_{\mathscr{C}(A)}(b) = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Exercícios 35.

1. Determine $\text{proj}_{\mathbb{R}^3}(a,b,c)$ e $\text{proj}_{\{\vec{0}\}}(a,b,c)$ para todo o $a,b,c \in \mathbb{R}$.
   $\text{proj}_{\mathbb{R}^3}(a,b,c) = (a,b,c)$ e $\text{proj}_{\{\vec{0}\}}(a,b,c) = (0,0,0)\ \forall a,b,c \in \mathbb{R}$.

2. Considere o vetor $b = (1,1,2)$ e o subespaço vetorial $V = \langle (1,0,1),(0,1,1) \rangle$. Justifique que $b \in V$ e indique as projeções ortogonais de b sobre V e $V^\perp$.
   $\text{proj}_V(b) = b$ e $\text{proj}_{V^\perp}(b) = \vec{0}$.

Exercícios 36.

1. Determine a projeção ortogonal do vetor $(2,3)$ sobre o vetor $(3,1)$.
   $\text{proj}_{(3,1)}((2,3)) = \left(\frac{27}{10}, \frac{9}{10}\right)$.

2. Determine as projeção ortogonais do vetor $(6,5,4)$ sobre a reta $<(1,-1,3)>$ e sobre o seu complemento ortogonal.
   $\text{proj}_{\langle (1,-1.3) \rangle}((6,5,4)) = \left(\frac{13}{11}, -\frac{13}{11}, \frac{39}{11}\right)$ e $\text{proj}_{\langle (1,-1.3) \rangle^\perp}((6,5,4)) = \left(\frac{53}{11}, \frac{68}{11}, \frac{5}{11}\right)$.

Exercício 37. Considere o vetor $b = (4,-1,1)$ e os subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^3$,

$$U = \{(x,y,z) : x+y+z = 0\} \quad \text{e} \quad V = <(1,0,1),(0,1,1)> .$$

1. Determine as projeções ortogonais de b sobre $U^\perp$, U, $V^\perp$ e V.
   $\text{proj}_{U^\perp}(b) = \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$.
   $\text{proj}_U(b) = \left(\frac{8}{3}, -\frac{7}{3}, -\frac{1}{3}\right)$.
   $\text{proj}_{V^\perp}(b) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$.
   $\text{proj}_V(b) = \left(\frac{10}{3}, -\frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right)$.

2. Calcule as distâncias de b a U e a V.
   $d(b,U) = \|\text{proj}_{U^\perp}(b)\| = \left\|\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)\right\| = \left|\frac{4}{3}\right| \|(1,1,1)\| = \frac{4}{3}\sqrt{3}$.
   $d(b,V) = \frac{2}{3}\sqrt{3}$.

3. Identifique o vetor de V a menor distância do vetor b.
   O vetor de V a menor distância de b é $\text{proj}_V(b) = \left(\frac{10}{3}, -\frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right)$.

Exercícios 38.

1. Determine a projeção ortogonal do vetor $(0,2,5,-1)$ sobre o subespaço vetorial de $\mathbb{R}^4$ gerado pelos vetores $(1,1,0,2)$ e $(-1,0,0,1)$.
   $\text{proj}_{\langle (1,1,0,2),(-1,0,0,1) \rangle}((0,2,5,-1)) = \left(\frac{7}{11}, \frac{1}{11}, 0, -\frac{4}{11}\right)$.

2. Considere o subespaço vetorial de $\mathbb{R}^4$,

$$U = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) : x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0,\ x_2 - x_3 = 0\}$$

   e o vetor $v = (2,1,0,1)$. Determine as projeções ortogonais de v sobre U e sobre complemento ortogonal de U.
   $\text{proj}_U((2,1,0,1)) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, $\text{proj}_{U^\perp}((2,1,0,1)) = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

Exercício 39. Sejam $v_1=(1,0,1,0)$, $v_2=(1,1,1,1)$, $v_3=(1,-1,1,-1)$, $A=[v_1\ v_2\ v_3]$ e $b=(1,2,3,4)$.

1. Calcule a projeção ortogonal de b sobre $\mathscr{C}(A)$ usando o método das equações normais.

   $(2,3,2,3)=A\bar{x}$, com $\bar{x}=(-1,3,0)$.

2. Indique uma solução dos mínimos quadrados do sistema $Ax=b$. Será que essa solução corresponde a uma solução de $Ax=b$ no sentido usual?

Uma possível solução dos mínimos quadrados, isto é, do sistema $Ax=\text{proj}_{\mathscr{C}(A)}(b)$, é $\bar{x}=(-1,3,0)$, que não corresponde a uma solução de $Ax=b$ no sentido usual pois $A\bar{x}\neq b$. De facto, tem-se $A\bar{x}=\text{proj}_{\mathscr{C}(A)}(b)\neq b$, uma vez que $b\notin\mathscr{C}(A)$ (verifique).

MATRIZ DE PROJEÇÃO

Exercícios 40.

1. Considere o vetor $w=(1,-2,2,2)$ e o subespaço $V=<\{(1,2,0,0),(1,0,1,1)\}>$.

   (a) Determine a matriz de projeção P sobre o subespaço V.

   $$P=\frac{1}{14}\begin{bmatrix}6&4&4&4\\4&12&-2&-2\\4&-2&5&5\\4&-2&5&5\end{bmatrix}$$

   (b) Utilizando a alínea anterior calcule a projeção de w sobre V.

   $\text{proj}_V(w)=Pw=(1,-2,2,2)$.

2. Determine as matrizes de projeção ortogonal sobre o plano V de equação $x+2y+3z=0$ e sobre $V^\perp$.

   A matriz de projeção sobre $V^\perp$ é $Q=\frac{uu^T}{u^Tu}=\frac{1}{14}\begin{bmatrix}1&3&3\\2&4&6\\3&6&9\end{bmatrix}$ onde $u=(1,2,3)$ é o vetor normal a V.

   A matriz de projeção sobre V é $P=I_3-Q=\frac{1}{14}\begin{bmatrix}13&-2&-3\\-2&10&-6\\-3&-6&5\end{bmatrix}$.

3. Sejam A uma matriz do tipo $m\times n$, com característica n e $P=A(A^\top A)^{-1}A^\top$ a matriz de projeção sobre $\mathscr{C}(A)$. Prove os seguintes resultados.

   (a) $P^\top=P$ (P é simétrica).

   (b) $P^2=P$ (P é idempotente).

4. Justifique que $P = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ é a matriz de projeção sobre o subespaço vetorial $W = \{(x, y, z, t) : x = y,\ z = t\}$.

BASE ORTOGONAL E MÉTODO DE GRAM-SCHIMDT

Exercícios 41.

1. Considere $u = (1,-1,0,1)$, $v = (0,1,0,1)$, $V = \langle u, v \rangle$ e $b = (2,-1,0,1)$.
   (a) Justifique que $\{u, v\}$ é uma base ortogonal do subespaço V.
   (b) Utilizando a alínea anterior determine a projeção ortogonal de b sobre V.
   $\text{proj}_{\langle u,v \rangle}(b) = \left(\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, 0, \frac{4}{3}\right)$.

2. Considere os vetores de $\mathbb{R}^3$, $a = (1,-1,1)$, $b = (-1,1,2)$ e $c = (1,1,0)$.
   (a) Mostre que $\{a, b, c\}$ é uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Utilizando projeções ortogonais escreva $(0,2,4)$ como combinação linear de a, b e c.
   $(0,2,4) = \text{proj}_{\mathbb{R}^3}(0,2,4) = \cdots = \frac{2}{3}a + \frac{5}{3}b + c$.

Exercícios 42.

1. (a) Utilizando o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt, determine uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ que inclua o vetor $(1,0,1)$.
   Uma possível base ortogonal é $\{(1,0,1),(1,0,-1),(0,1,0)\}$.
   (b) Transforme a base obtida na alínea anterior numa base ortonormada de $\mathbb{R}^3$.
   Tomando os versores dos vetores da base anterior obtém-se a b.o.n, $\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), (0,1,0)\right\}$.

2. Seja $V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0\}$.
   (a) Utilizando o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt determine uma base ortogonal de V.
   Uma possível base ortogonal é $\{(-1,1,0,0),(1,1,2,0),(-1,-1,1,3)\}$.
   (b) Utilizando a alínea anterior calcule a projeção ortogonal de $(2,1,0,1)$ sobre V.
   $\text{proj}_V(b) = (1,0,1,0)$.

3. Considere $W = \langle (1,1,1,-1),(0,1,2,-1)\rangle$ e $b = (4,-1,0,3)$.

   (a) Determine uma base e a dimensão de $W^{\perp}$.
   Uma possível base é $\{(1,-2,1,0),(0,1,0,1)\}$ e a dimensão é 2.

   (b) Calcule $\text{proj}_{W^{\perp}}(b)$.
   $\text{proj}_{W^{\perp}}(b) = (2,-1,2,3)$.

   (c) Calcule as distâncias de b a W e $W^{\perp}$.
   $d(b,W) = \sqrt{18}$, $d(b,W^{\perp}) = \sqrt{8}$.

   (d) Indique uma base ortogonal de $\mathbb{R}^4$ que contenha uma base de W.
   Uma possível base ortogonal é $\{(1,1,1,-1),(-1,0,1,0),(1,-2,1,0),(1,1,1,3)\}$.

4. Determine uma base ortogonal de $\mathbb{R}^4$ que inclua uma base de cada um dos seguintes subespaços vetoriais

   (a) $\langle (1,0,1,0),(1,1,1,1),(1,-1,1,-1)\rangle$
   Uma possível base ortogonal é $\{(1,0,1,0),(0,1,0,1),(-1,0,1,0),(0,-1,0,1)\}$.

   (b) $\{(x,y,z,w) : x-y-z+w=0,\ x+z=0\}$
   Uma possível base ortogonal é
   $\{(-1,-2,1,0),(-1,1,1,3),(1,0,1,0),(1,-1,-1,1)\}$.

EXERCÍCIOS VARIADOS

Exercícios 43.

1. Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 6 & 2 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}$.

   (a) Indique uma base e a dimensão de $\mathscr{C}(A)$.
   Uma possível base é $\{(1,0,-2),(0,1,6),(2,-1,2)\}$ e dimensão é 3.

   (b) Descreva, analitica e geometricamente, $\mathscr{C}(A)$.
   $\mathbb{R}^3$

   (c) Qual a dimensão de $\mathscr{N}(A)$?
   $\dim \mathscr{N}(A) = 0$.

   (d) Calcule a projeção de b sobre $\mathscr{C}(A)$.
   $\text{proj}_{\mathscr{C}(A)}(b) = \text{proj}_{\mathbb{R}^3}(b) = b$.

2. Considere $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = y\}$

   (a) Indique uma base e a dimensão de V.
   Uma possível base é $\{(1,1,0),(0,0,1)\}$ e a dimensão é 2.

(b) Determine o conjunto de todos os vetores ortogonais a V.
$V^{\perp} = \langle (1,-1,0) \rangle$ que representa uma reta de $\mathbb{R}^3$ que passa na origem com a direção do vetor $(1,-1,0)$.

(c) Calcule a matriz de projeção sobre V.
$P = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

3. Considere uma matriz $A_{3\times 4}$ tal que $\{(2,3,1,0)\}$ é uma base para $\mathcal{N}(A)$.

(a) Qual a característica de A?
$\text{car}(A) = 3$.

(b) Indique as soluções de $Ax = 0$.
$\mathcal{N}(A) = \langle (2,3,1,0) \rangle$.

(c) Escreva a matriz de projeção sobre $\mathcal{N}(A)$.
$P = \frac{vv^T}{v^T v} = \frac{1}{14}\begin{bmatrix} 4 & 6 & 2 & 0 \\ 6 & 9 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, em que $v = (2,3,1,0)$.

(d) Calcule a distância de $b = (0,2,1,0)$ a $\mathcal{N}(A)$.
$\left\| (-1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0) \right\| = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

4. Determine uma base ortogonal para cada um dos subespaços vetoriais

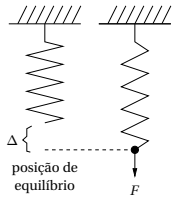
(a) $\langle (1,1,1),(1,0,-1),(0,3,1) \rangle$
Uma possível base ortogonal é $\{(1,1,1),(1,0,-1),(-1,2,-1)\}$.

(b) $\langle (1,0,1,0),(1,1,1,1),(1,-1,1,-1) \rangle$
Uma possível base ortogonal é $\{(1,0,1,0),(0,1,0,1)\}$.

(c) $\{(x,y,z) : x+y=0,\ y+z=0\}$
Uma possível base ortogonal é $\{(1,-1,1)\}$.

(d) $\{(x,y,z,w) : x-y-z+w=0,\ x+z=0\}$
Uma possível base ortogonal é $\{(-1,-2,1,0),(-1,1,1,3)\}$.

5. Segundo a *lei de Hooke*, o deslocamento x de uma mola relativamente à sua posição de equilíbrio, é proporcional à força aplicada na mola, isto é, verifica uma relação do tipo $F = k\,x$ em que k é uma constante positiva designada por *constante elástica da mola* (esta lei é uma aproximação apenas válida para pequenas deformações da mola).



Foram efectuados diversos deslocamentos numa mola e registadas as forças que foram necessárias para produzir esses deslocamentos, assinaladas no seguinte quadro.

x_i (m)	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35
F_i (N)	2.1	3.9	5.7	8.2	10.5	11.7

Pretende-se estimar o valor da constante elástica da mola k que minimiza o erro E no sentido dos mínimos quadrados, isto é, que minimiza

$$E^2 = (F_1 - k\,x_1)^2 + \cdots + (F_6 - k\,x_6)^2.$$

Interprete geometricamente o resultado obtido.

A constante k é a solução no **sentido dos mínimos quadrados** do sistema sobredeterminado a 6 equações e uma variável k, $x\,k = F$, isto é, a solução no **sentido usual** do sistema $x\,k = \text{proj}_x(F)$. Uma vez que $\text{proj}_x(F) = \dfrac{F^T x}{x^T x}\,x$ com

$$x = (0.1, 0.15, 0.2, 0.25, 0.3, 0.35), \quad \text{e} \quad F = (2.1, 3.9, 5.7, 8.2, 10.5, 11.7),$$

obtém-se o valor aproximado da constante elástica, $k = \dfrac{F^T x}{x^T x} = 32.31655$.