Vetor ortogonal ao espaço das colunas/espaço nulo

Das duas relações fundamentais do slide 140 deduzem-se os seguintes critérios para um vetor ser ortogonal ao espaço das colunas e ao espaço nulo de uma matriz.

Observação

Sejam $A_{m\times n}$, $v \in \mathbb{R}^m$ e $b \in \mathbb{R}^n$. Tem-se:

$$\begin{aligned} v \perp \mathcal{C}(A) &\Leftrightarrow v \in \mathcal{C}(A)^\perp = \mathcal{N}(A^T) \\ &\Leftrightarrow A^T v = \vec{0}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b \perp \mathcal{N}(A) &\Leftrightarrow b \in \mathcal{N}(A)^\perp = \mathcal{C}(A^T) \\ &\Leftrightarrow A^T x = b \quad \text{é possível} \\ &\Leftrightarrow \left[\, A^T \mid b \,\right] \quad \text{é possível}. \end{aligned}$$

Complemento ortogonal de um subespaço dado por equações - exemplo

Consideremos o subespaço vetorial definido por equações homogéneas,

$$V = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^4 \,:\, x_1 - x_2 - x_3 = 0,\ x_1 - 2x_3 = 0\right\},$$

que representa a **reta** que passa na origem obtida como intersecção dos planos não paralelos $x_1 - x_2 - x_3 = 0$ e $x_1 - 2x_3 = 0$. Tem-se então

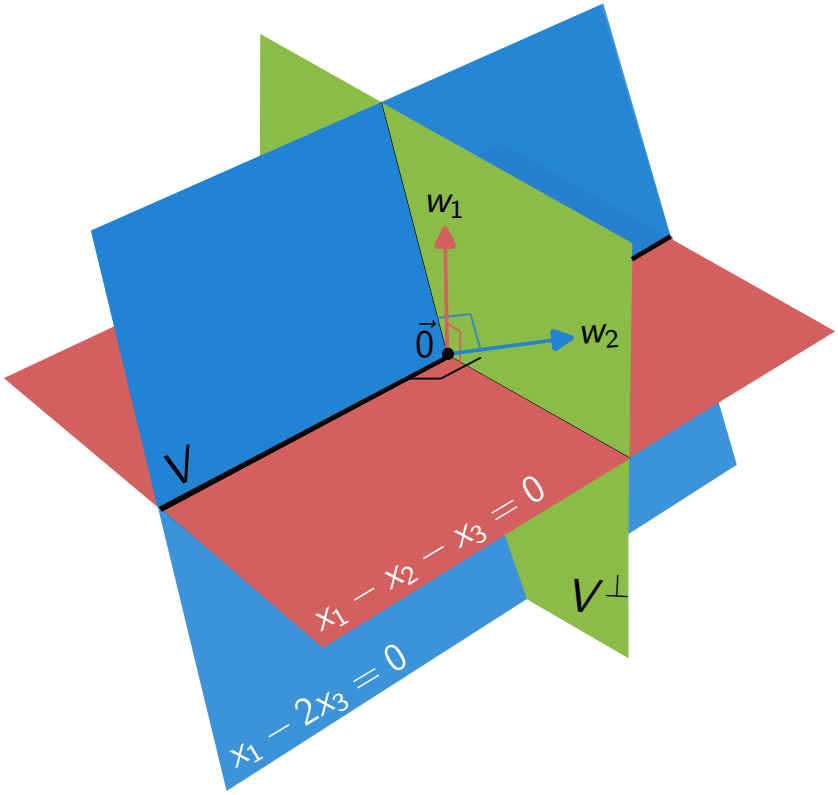
$$V = \mathcal{N}\left(\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}}_{A}\right) = \mathcal{N}(A),$$

e pela 2ª fórmula do slide 140 obtém-se,

$$V^\perp = \mathcal{N}(A)^\perp = \mathcal{C}(A^T) = \mathcal{C}\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}\right) = \left\langle (1,-1,-1), (1,0,-2) \right\rangle.$$

Logo $V^\perp$ define o **plano** de $\mathbb{R}^3$ que passa na origem e tem como vetores diretores os vetores normais aos 2 planos anteriores, $w_1 = (1,-1,-1)$ e $w_2 = (1,0,-2)$. Note-se que $\dim V + \dim V^\perp = 1 + 2 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$.

Ilustração do exemplo anterior



Complementos ortogonais dos subespaços maximal e minimal

Seja V é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^m$. Pelas propriedades do slide 137 tem-se o seguinte:

- $\dim V + \dim V^\perp = \dim \mathbb{R}^m = m$.
- Se $V^\perp = W$ então $W^\perp = V$.

Tomando $V = \mathbb{R}^m$ tem-se $\dim(\mathbb{R}^m)^\perp = m - \dim \mathbb{R}^m = m - m = 0$ e portanto,

$$(\mathbb{R}^m)^\perp = \{\vec{0}\} \quad \text{e} \quad \{\vec{0}\}^\perp = \mathbb{R}^m.$$

Obtivemos portanto as seguintes relações:

$$\text{subespaço maximal}^\perp = \text{subespaço minimal}$$

$$\text{subespaço minimal}^\perp = \text{subespaço maximal}$$

Complemento ortogonal dos subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^n$, $n = 2, 3, 4$

Quadros-resumo dos subespaços vetoriais e resp. complementos ortogonais

$V \subset \mathbb{R}^2$	$V^\perp \subset \mathbb{R}^2$	$\dim V + \dim V^\perp$
$\{\vec{0}\}$	$\mathbb{R}^2$	$0 + 2$
reta que passa na origem	reta perpendicular que passa na origem	$1 + 1$
$\mathbb{R}^2$	$\{\vec{0}\}$	$2 + 0$

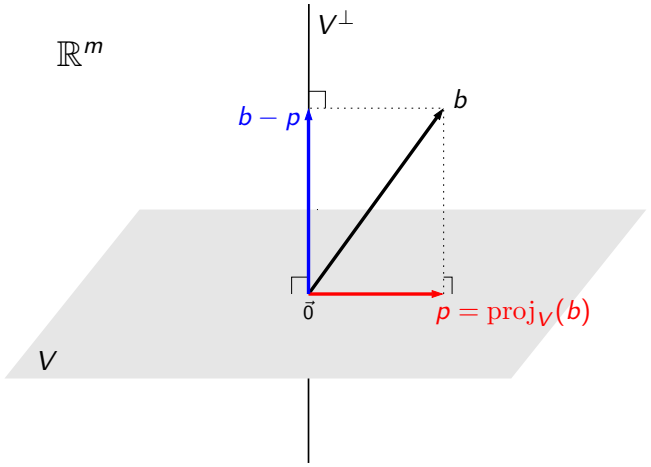
$V \subset \mathbb{R}^3$	$V^\perp \subset \mathbb{R}^3$	$\dim V + \dim V^\perp$
$\{\vec{0}\}$	$\mathbb{R}^3$	$0 + 3$
reta que passa na origem	plano perpendicular que passa na origem	$1 + 2$
plano que passa na origem	reta perpendicular que passa na origem	$2 + 1$
$\mathbb{R}^3$	$\{\vec{0}\}$	$3 + 0$

$V \subset \mathbb{R}^4$	$V^\perp \subset \mathbb{R}^4$	$\dim V + \dim V^\perp$
$\{\vec{0}\}$	$\mathbb{R}^4$	$0 + 4$
reta que passa na origem	hiperplano perpend. que passa na origem	$1 + 3$
"plano" que passa na origem	"plano" perpend. que passa na origem	$2 + 2$
hiperplano que passa na origem	reta perpendicular que passa na origem	$3 + 1$
$\mathbb{R}^4$	$\{\vec{0}\}$	$4 + 0$

Conceito de projeção ortogonal

Teorema-definição

- Seja V um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^m$. Para todo o $b \in \mathbb{R}^m$ **existe um e um só** $p \in V$ tal que $(b - p) \in V^\perp$, ou seja, $(b - p) \perp V$.
- O vetor p é designado por projeção ortogonal de b sobre V e denota-se por $\text{proj}_V(b)$.

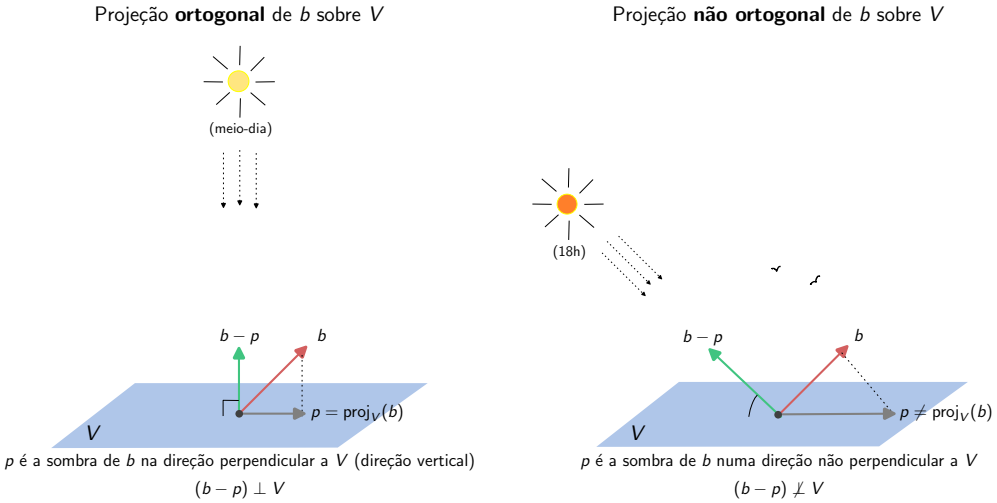


Caracterização da projeção ortogonal

A definição anterior significa que o vetor $p = \text{proj}_V(b)$ é caracterizado pelas duas condições:

- $p \in V \rightarrow$ projecta b sobre o subespaço vetorial $V \ldots$
- $(b-p) \in V^\perp$, isto é, $(b-p) \perp V \rightarrow$ na direção perpendicular a V.

Ilustração "intuitiva" das condições anteriores:



Caracterização da projeção ortogonal - exercício

Exercício na aula

Sejam $v_1 = (1,2,-1)$, $v_2 = (2,0,2)$, $b = (1,3,-5)$ e $V = \langle v_1, v_2 \rangle = \mathcal{C}(A)$, onde $A = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix}$. Mostre por definição que $\text{proj}_V(b) = (0,4,-4)$.

Resolução: Temos que mostrar que o vetor $p = (0,4,-4)$ verifica as duas condições que caracterizam a projeção ortogonal do slide anterior:

- $p = (0,4,-4) \in V = \mathcal{C}(A)$, isto é, $Ax = p$ é possível. De facto,

$$[A \mid p] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & -4 \end{array}\right] \rightarrow \cdots \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]. \quad \checkmark$$

- $b - p = (1,3,-5) - (0,4,-4) = (1,-1,-1) \in V^\perp = \mathcal{C}(A)^\perp = \mathcal{N}(A^T)$, isto é, $A^T(b-p) = \vec{0}$. De facto,

$$A^T(b-p) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \vec{0}. \quad \checkmark$$

(Alternativamente pode-se mostrar que $b-p$ é ortogonal aos geradores de V, i.e., $(b-p) \cdot v_1 = (b-p) \cdot v_2 = 0$).

Uma vez que as duas condições são verificadas, $p = \text{proj}_V(b)$.

Casos triviais: projeção sobre os subespaços maximal e minimal

A projeção ortogonal sobre o subespaço maximal $\mathbb{R}^m$ ou sobre o subespaço minimal $\{\vec{0}\}$ decorre imediatamente por definição:

- $\boxed{\text{proj}_{\mathbb{R}^m}(b) = b \text{ para todo o } b \in \mathbb{R}^m.}$

  De facto,
  - $p = b \in \mathbb{R}^m$.
  - $b - p = b - b = \vec{0} \in (\mathbb{R}^m)^\perp = \{\vec{0}\}$.

- $\boxed{\text{proj}_{\{\vec{0}\}}(b) = \vec{0} \text{ para todo o } b \in \mathbb{R}^m.}$

  De facto,
  - $p = \vec{0} \in \{\vec{0}\}$.
  - $b - \vec{0} = b \in \{\vec{0}\}^\perp = \mathbb{R}^m$.

E a projeção ortogonal sobre outros subespaços vetoriais?

Caso não trivial mais simples: projeção sobre uma reta

- O caso não trivial mais simples corresponde a calcular a projeção ortogonal sobre um subespaço vetorial de dimensão um, isto é, sobre uma reta que passa na origem.

Fórmula da projeção ortogonal sobre uma reta

Seja $V = \langle v \rangle$ com $v \in \mathbb{R}^m$ e $v \neq \vec{0}$. Para qualquer $b \in \mathbb{R}^m$ tem-se

$$\boxed{\text{proj}_V(b) = \text{proj}_{\langle v \rangle}(b) = \frac{b \cdot v}{v \cdot v} v = \frac{b^T v}{v^T v} v}$$

A fórmula anterior não depende da escolha do vetor diretor $v \in V \setminus \{\vec{0}\}$.

Usando a seguinte fórmula alternativa para o produto escalar,

$$b \cdot v = \|b\| \, \|v\| \cos(\theta),$$

onde θ é o ângulo formado entre b e v e a relação $v \cdot v = \|v\|^2$ obtém-se,

$$\text{proj}_{\langle v \rangle}(b) = \frac{\|b\| \, \cancel{\|v\|} \cos(\theta)}{\|v\| \cancel{\|v\|}} v = \|b\| \cos(\theta) \frac{v}{\|v\|} = \|b\| \cos(\theta) \, \text{vers}(v).$$