Projeção ortogonal sobre uma reta - demonstração

Demonstração: seja $p = \dfrac{b^T v}{v^T v}\, v$. Tem-se

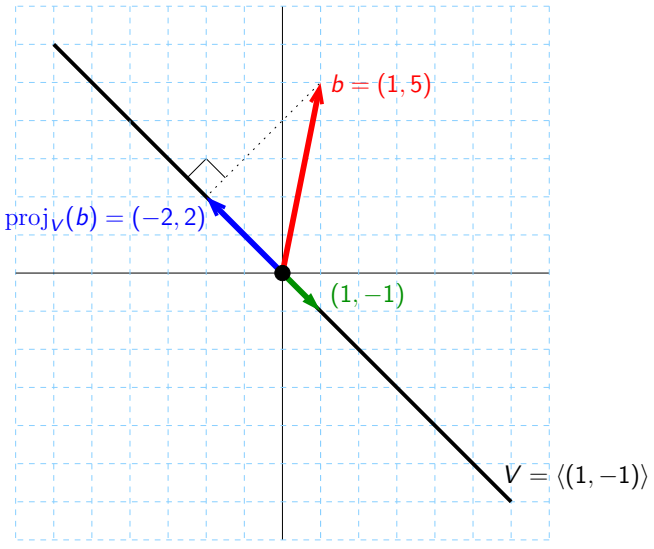
- $p = \alpha\, v$, com $\alpha = \dfrac{b^T v}{v^T v} \in \mathbb{R}$.
  Logo $p \in V = \langle v \rangle$.
- $(b-p)^T v = (b - \alpha\, v)^T v = b^T v - \alpha\, v^T v = b^T v - \dfrac{b^T v}{\cancel{v^T v}}\, \cancel{v^T v} = 0$.
  Logo $(b-p) \perp v$ e portanto $(b-p) \in V^\perp = \langle v \rangle^\perp$.

Uma vez que $p = \dfrac{b^T v}{v^T v}\, v$ verifica as duas condições que caracterizam a projeção ortogonal sobre V do slide 147 tem-se $\text{proj}_V(b) = \dfrac{b^T v}{v^T v}\, v$. $\square$

Projeção ortogonal sobre uma reta - exemplo

Sejam $b = (1,5)$ e $V = \{(x_1, x_2) : x_1 = -x_2\}$ a bissectriz dos quadrantes pares. Então V é uma reta que passa na origem com vetor director $(1,-1)$ (por exemplo), tendo-se $V = \langle (1,-1) \rangle$. Logo,

$$\text{proj}_V(b) = \text{proj}_{\langle (1,-1) \rangle}(b) = \frac{(1,-1)\cdot(1,5)}{(1,-1)\cdot(1,-1)}(1,-1) = (-2,2).$$



Projeção ortogonal sobre um vetor

Fórmula da projeção ortogonal sobre um vetor

Seja $v \in \mathbb{R}^m$ e $v \neq \vec{0}$. Dado $b \in \mathbb{R}^m$ define-se a projeção ortogonal de b sobre o vetor v, denotada $\text{proj}_v(b)$, como sendo a projeção de b sobre a reta definida por v, isto é,

$$\text{proj}_v(b) = \text{proj}_{\langle v \rangle}(b) = \frac{v \cdot b}{v \cdot v} v$$

Por exemplo,

$$\begin{aligned} \text{proj}_{(-4,4)}(1,5) &= \text{proj}_{\langle(-4,4)\rangle}(1,5) = \frac{(-4,4)\cdot(1,5)}{(-4,4)\cdot(-4,4)}(-4,4) \\ &= \frac{1}{2}(-4,4) = (-2,2). \end{aligned}$$

Uma decomposição fundamental

Se $p = \text{proj}_V(b)$ tem-se por definição:

- $p \in V$
- $b - p \in V^\perp$

Logo $b - p = \text{proj}_{V^\perp}(b)$. De facto,

- $q = b - p \in V^\perp$
- $b - q = b - (b - p) = p \in V = (V^\perp)^\perp$

Logo $b = p + (b - p)$ traduz-se na **decomposição** de b segundo V e $V^\perp$:

$$\boxed{b = \text{proj}_V(b) + \text{proj}_{V^\perp}(b)}$$

Observação

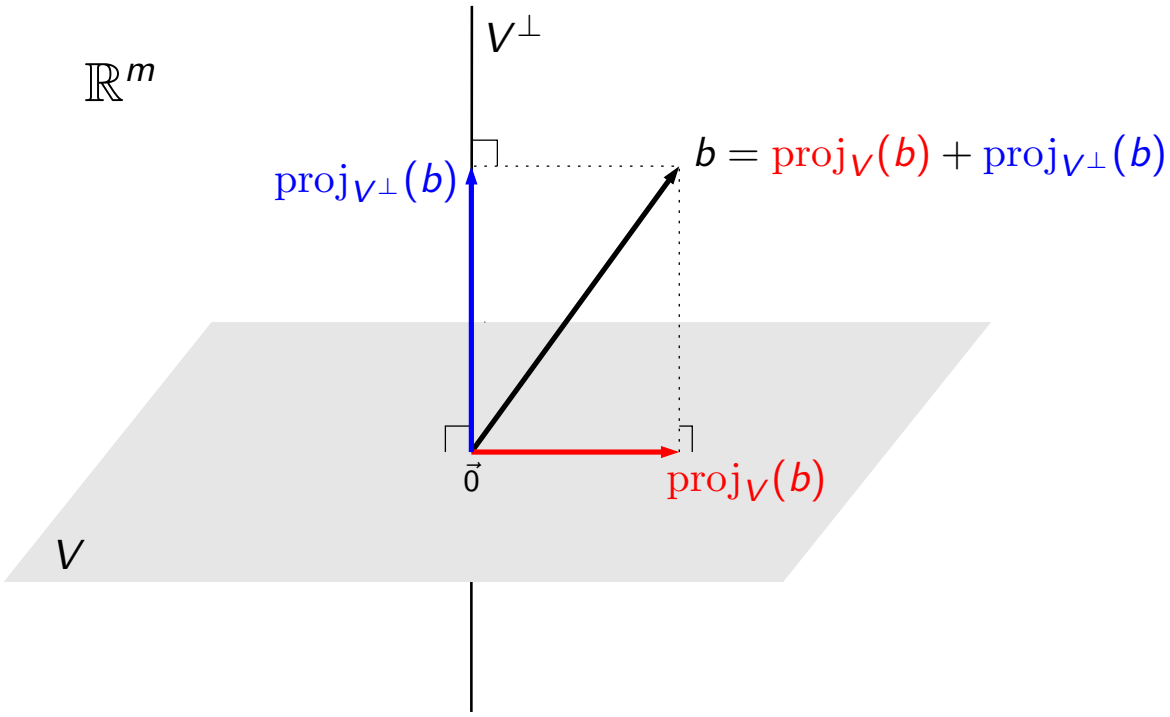
Se tivermos uma decomposição,

$$b = p + q,$$

com $p \in V$ e $q \in V^\perp$, então por definição de projeção ortogonal,

$$p = \text{proj}_V(b) \quad \text{e} \quad q = \text{proj}_{V^\perp}(b).$$

$b = \text{proj}_V(b) + \text{proj}_{V^\perp}(b)$



Projeção ortogonal sobre subespaços de codimensão um

Um subespaço vetorial $V \subset \mathbb{R}^n$ diz-se de **codimensão um** se $\dim V = \dim \mathbb{R}^n - 1 = n - 1$, ou seja, se $\dim V^\perp = 1$ ([13]). Nessa altura, $V^\perp = \langle w \rangle$ para algum $w \neq \vec{0}$, ou seja, $V^\perp$ define uma reta com vetor diretor w e pode-se aplicar a decomposição fundamental do slide 154,

$$b = \text{proj}_V(b) + \text{proj}_{V^\perp}(b),$$

para calcular a projeção ortogonal de b sobre V:

$$\text{proj}_V(b) = b - \text{proj}_{V^\perp}(b) = b - \text{proj}_{\langle w \rangle}(b) = b - \frac{b \cdot w}{w \cdot w} w.$$

Exercício na aula

Sejam $V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0\}$ e $b = (1, 1, 1, 1)$. Calcule $\text{proj}_V(b)$.

[13] Recorde que $\dim V + \dim V^\perp = \dim \mathbb{R}^n = n$.