Vetor mais próximo e distância a um subespaço vetorial

Teorema

Sejam $b \in \mathbb{R}^m$ e V subespaço vetorial de $\mathbb{R}^m$. Então:

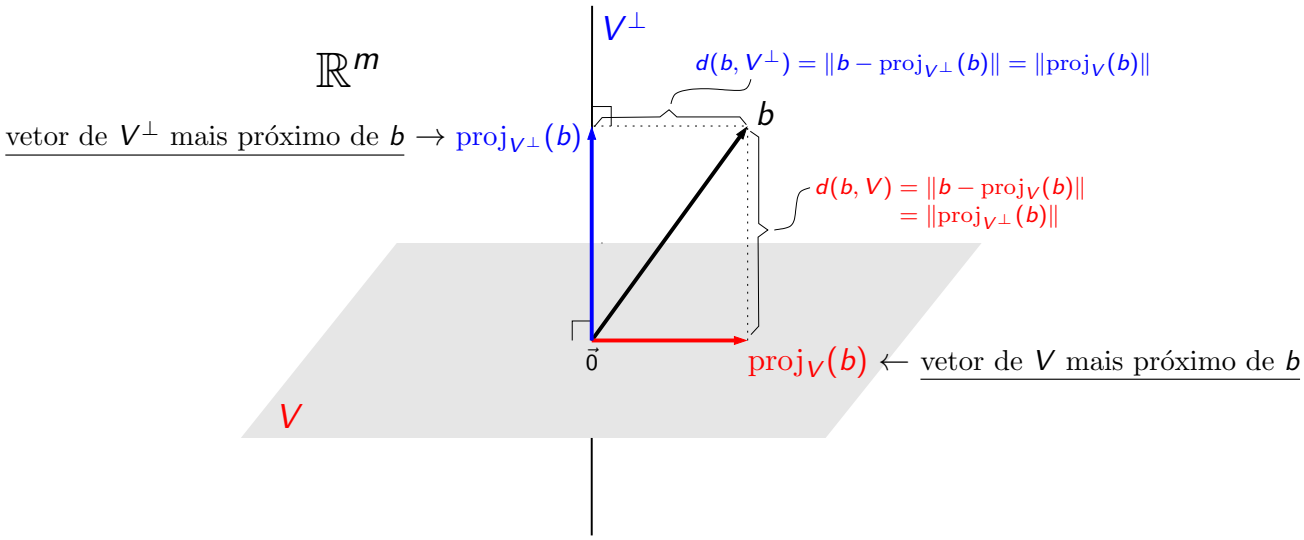
- O vetor de V mais próximo de b é a $\text{proj}_V(b)$ e tem-se,

$$\boxed{d(b, V) = d(b, \text{proj}_V(b)) = \|b - \text{proj}_V(b)\| = \|\text{proj}_{V^\perp}(b)\|.}$$

- O vetor de $V^\perp$ mais próximo de b é a $\text{proj}_{V^\perp}(b)$ e tem-se,

$$\boxed{d(b, V^\perp) = d(b, \text{proj}_{V^\perp}(b)) = \|b - \text{proj}_{V^\perp}(b)\| = \|\text{proj}_V(b)\|.}$$

Vetor mais próximo e distância a um subespaço vetorial



Observações

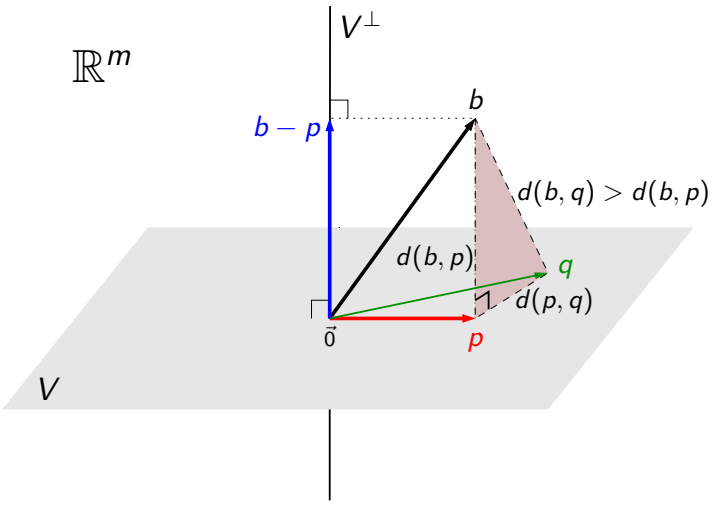
- Determinar o vetor de V mais próximo de b $\Leftrightarrow$ calcular a $\text{proj}_V(b)$.
- $b \in V \Leftrightarrow d(b, V) = 0 \Leftrightarrow \|\text{proj}_{V^\perp}(b)\| = 0 \Leftrightarrow \text{proj}_V(b) = b.$
- $b \in V^\perp \Leftrightarrow d(b, V^\perp) = 0 \Leftrightarrow \|\text{proj}_V(b)\| = 0 \Leftrightarrow \text{proj}_V(b) = \vec{0}.$

Demonstração do teorema do slide 163 (não foi feita na aula)

Podemos supor que $b \notin V$. Sejam $p = \text{proj}_V(b)$ e $q \in V$, $q \neq p$. Tem-se que $d(b,q)$ corresponde ao comprimento da hipotenusa do triângulo rectângulo assinalado na figura, triângulo esse com catetos de comprimentos $d(b,p) > 0$ e $d(q,p) > 0$. Pelo análogo do teorema de Pitágoras para vetores de $\mathbb{R}^m$ tem-se,

$$d(b,q)^2 = d(b,p)^2 + d(q,p)^2 > d(b,p)^2.$$

Logo $d(b,q) > d(b,p)$, para todo o $q \in V$, $q \neq p$. $\square$



Conjunto ortogonal de vetores

Definição de conjunto ortogonal/ortonormado de vetores

Sejam $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^m$. Diz-se que $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é um conjunto ortogonal se os vetores forem 2 a 2 perpendiculares entre si, isto é, se $v_i \cdot v_j = 0$ para todo o $i \neq j$. Se além disso, $v_1, \ldots, v_n$ forem vetores unitários, isto é, $\|v_i\| = 1$ $\forall i$, então $\{v_1, \ldots, v_n\}$ diz-se um conjunto ortonormado (o.n.)

Exemplos

- $\{v_1, v_2, v_3\} = \{(0,1,1), (1,2,-2), (4,-1,1)\}$ é um **conjunto ortogonal** de vetores de $\mathbb{R}^3$. De facto,

  $$v_1 \cdot v_2 = (0,1,1) \cdot (1,2,-2) = 0 \text{ e portanto } v_1 \perp v_2,$$

  $$v_1 \cdot v_3 = (0,1,1) \cdot (4,-1,1) = 0 \text{ e portanto } v_1 \perp v_3,$$

  $$v_2 \cdot v_3 = (1,2,-2) \cdot (4,-1,1) = 0 \text{ e portanto } v_2 \perp v_3.$$

- A base canónica de $\mathbb{R}^m$ é um **conjunto o.n.** (verifique!).

Normalização de vetores

Observação

Se $\{v_1, \ldots, v_k\}$ for um conjunto ortogonal de vetores não nulos de $\mathbb{R}^m$, então

$$\{\text{vers}(v_1), \ldots, \text{vers}(v_k)\} = \left\{ \frac{v_1}{\|v_1\|}, \ldots, \frac{v_k}{\|v_k\|} \right\}$$

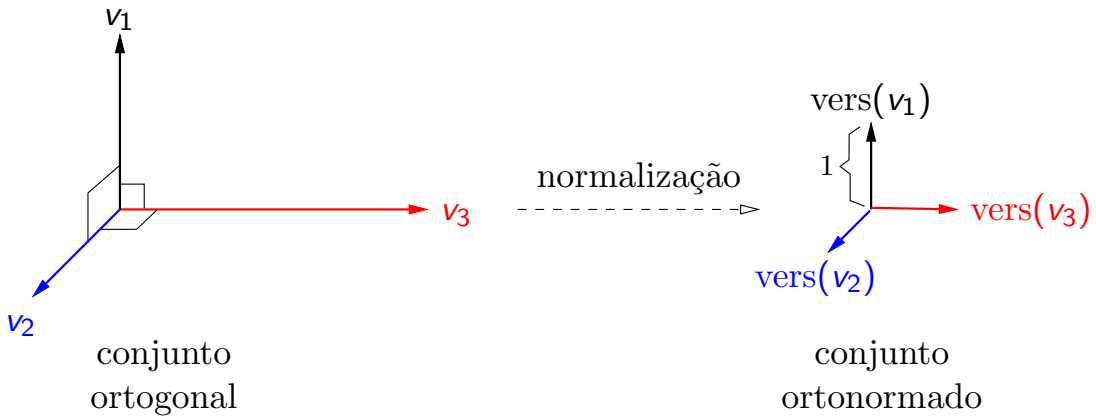
é um conjunto ortonormado de vetores de $\mathbb{R}^m$.

Exemplo do slide anterior revisitado

Vimos no slide anterior que $\{v_1, v_2, v_3\} = \{(0,1,1), (1,2,-2), (4,-1,1)\}$ era um conjunto ortogonal de vetores. Normalizando este conjunto, dividindo cada vetor pela sua norma, obtém-se o conjunto ortonormado,

$$\{\text{vers}(v_1), \text{vers}(v_2), \text{vers}(v_3)\} = \left\{ \tfrac{v_1}{\|v_1\|}, \tfrac{v_2}{\|v_2\|}, \tfrac{v_3}{\|v_3\|} \right\}$$
$$= \left\{ \left(0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}, -\tfrac{2}{3}\right), \left(\tfrac{4}{3\sqrt{2}}, -\tfrac{1}{3\sqrt{2}}, \tfrac{1}{3\sqrt{2}}\right) \right\}.$$

Ilustração da normalização de vetores



Base ortogonal = base + conjunto ortogonal

Definição de base ortogonal/ortonormada

Uma base ortogonal/ base ortonormada (b.o.n) de um subespaço vetorial V é uma base de V que é simultaneamente um conjunto ortogonal/ortonormado.

Vejamos dois exemplos:

- A base canónica de $\mathbb{R}^m$ é a b.o.n mais importante de $\mathbb{R}^m$.
- O conjunto ortogonal considerado anteriormente,

$$\{v_1, v_2, v_3\} = \{(0,1,1), (1,2,-2), (4,-1,1)\},$$

é linearmente independente ([16]) e define portanto uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$. A normalização deste conjunto obtida no slide 167 define uma b.o.n. de $\mathbb{R}^3$ distinta da base canónica.

[16] Como veremos a seguir, um conjunto ortogonal de vetores não nulos é sempre linearmente independente.

Projeção ortogonal sobre um subespaço munido de uma base ortogonal

Importância das bases ortogonais fica evidente no próximo teorema que estende a fórmula da projeção ortogonal sobre uma reta para um subespaço vetorial arbitrário V munido de uma base ortogonal.

Teorema

Seja $\{v_1, \ldots, v_k\}$ uma base ortogonal de um subespaço vetorial $V \subset \mathbb{R}^m$. Para todo o $b \in \mathbb{R}^m$ tem-se a decomposição,

$$\begin{aligned} \text{proj}_V(b) &= \text{proj}_{v_1}(b) + \cdots + \text{proj}_{v_k}(b) \\ &= \frac{b \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 + \cdots + \frac{b \cdot v_k}{v_k \cdot v_k} v_k. \end{aligned}$$

Observação muito importante

A decomposição anterior é falsa se a base não for ortogonal!!

Demonstração do teorema do slide 170 (não foi feita na aula teórica)

A demonstração é muito semelhante à demonstração da fórmula da projeção sobre uma reta (ver o slide 151). Seja $V = \langle v_1, \ldots, v_k \rangle$ e $p = \text{proj}_V(b)$.
Por definição de projeção ortogonal tem-se o seguinte:

- $p \in V$. Logo existem escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ tais que $p = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k$.
- $(b - p) \in V^\perp$. Logo pelo teorema do slide 132 tem-se $v_j^T (b - p) = 0$ para todo o $j = 1, \ldots, k$.

Para cada $j = 1, \ldots, k$ tem-se,

$$\begin{aligned} v_j^T (b - p) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad v_j^T \left(b - (\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k)\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad v_j^T b - v_j^T (\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad v_j^T b - \alpha_1 \underbrace{v_j^T v_1}_{0} - \cdots - \alpha_j \underbrace{v_j^T v_j}_{\|v_j\|^2 \neq 0} - \cdots - \alpha_k \underbrace{v_j^T v_k}_{0} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad v_j^T b = \alpha_j v_j^T v_j \Leftrightarrow \alpha_j = \frac{v_j^T b}{v_j^T v_j} = \frac{v_j \cdot b}{v_j \cdot v_j}, \end{aligned}$$

uma vez que $v_j^T v_i = 0$ se $i \neq j$ e que $v_j^T v_j = v_j \cdot v_j = \|v_j\|^2 \neq 0$ porque $v_j \neq 0$. Logo,

$$\text{proj}_V(b) = p = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k = \frac{b \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 + \cdots + \frac{b \cdot v_k}{v_1 \cdot v_k} v_k = \text{proj}_{v_1}(b) + \cdots + \text{proj}_{v_k}(b). \square$$

Exemplo

Exercício na aula

Calcular $\text{proj}_V(b)$ em que $V = \langle (0,1,1), (1,2,-2) \rangle$ e $b = (-1,0,4)$.

Resolução: Sejam $v_1 = (0,1,1)$ e $v_2 = (1,2,-2)$. Como $\{v_1, v_2\}$ é l.i. pois os vetores não são múltiplos entre si ([17]) e gera V, é uma base de V, que é simultaneamente um conjunto ortogonal pois $v_1 \cdot v_2 = 0$ (verifique). Logo $\{v_1, v_2\}$ é uma base ortogonal de V, tendo-se pelo teorema do slide 170,

$$\begin{aligned} \text{proj}_V(b) &= \text{proj}_{\langle v_1, v_2 \rangle}(b) = \text{proj}_{v_1}(b) + \text{proj}_{v_2}(b) \\ &= \frac{b \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 + \frac{b \cdot v_2}{v_2 \cdot v_2} v_2 \\ &= \frac{(-1,0,4) \cdot (0,1,1)}{(0,1,1) \cdot (0,1,1)} (0,1,1) + \frac{(-1,0,4) \cdot (1,2,-2)}{(1,2,-2) \cdot (1,2,-2)} (1,2,-2) \\ &= \tfrac{4}{2}(0,1,1) + \tfrac{-9}{9}(1,2,-2) = (-1,0,4). \end{aligned}$$

[17] Veremos a seguir que qualquer conjunto ortogonal de vetores não nulos é linearmente independente.