## Resolução do exercício do slide anterior

**Resolução**: $V = \mathcal{N}(A)$, com $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$, define um hiperplano de $\mathbb{R}^4$ de dimensão 3 (número colunas sem pivot de $A' = A$) e portanto tem codimensão um, isto é, $\dim V^\perp = \dim \mathbb{R}^4 - \dim V = 4 - 3 = 1$.

Logo podemos usar a relação $\text{proj}_V(b) = b - \text{proj}_{V^\perp}(b)$ para calcular $\text{proj}_V(b)$. Calculando $V^\perp$ usando a 2ª fórmula do slide 140, tem-se

$$V^\perp = \mathcal{N}(A)^\perp = \mathcal{C}(A^T) = \mathcal{C}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}\right) = \langle (1,2,3,4) \rangle,$$

que define a reta de $\mathbb{R}^4$ com vetor diretor $w = (1,2,3,4)$, obtendo-se

$$\begin{aligned} \text{proj}_V(b) &= b - \text{proj}_{V^\perp}(b) = b - \text{proj}_{\langle w \rangle}(b) = b - \frac{b \cdot w}{w \cdot w} w \\ &= (1,1,1,1) - \frac{(1,1,1,1)\cdot(1,2,3,4)}{(1,2,3,4)\cdot(1,2,3,4)}(1,2,3,4) \\ &= (1,1,1,1) - \frac{1}{3}(1,2,3,4) = \frac{1}{3}(2,1,0,-1). \end{aligned}$$



## Qual o método a usar no cálculo da projeção ortogonal?

Sejam $V$ subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$ e $b \in \mathbb{R}^n$:

- Se $V$ é minimal/maximal/reta então a $\text{proj}_V(b)$ é direta (ver os slides 149 e 150).
- Se $V^\perp$ é uma reta, isto é, se $\dim V = n - 1$, então a $\text{proj}_{V^\perp}(b)$ é direta e calcula-se $\text{proj}_V(b) = b - \text{proj}_{V^\perp}(b)$ (ver o slide 156).
- Os dois pontos anteriores permitem já cobrir todos os casos em que $V$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$.
- O "primeiro caso" em que ambas as projeções ortogonais sobre $V$ e $V^\perp$ não são diretas, ocorre quando $V$ e $V^\perp$ têm dimensão 2 em $\mathbb{R}^4$, isto é, são "planos" perpendiculares entre si em $\mathbb{R}^4$ (ver o slide 145).
- Nos casos em que ambas as projeções ortogonais sobre $V$ e $V^\perp$ não são diretas usam-se métodos gerais, como o método das bases ou o método de ortogonalização de Gram-Schimdt, métodos esses que vamos dar em seguida.

# "Método das bases" para o cálculo da projeção ortogonal

## Algoritmo

`Input:` Subespaço vetorial $V \subset \mathbb{R}^n$ com $V \neq \{\vec{0}\}$ e $V \neq \mathbb{R}^n$, e $b \in \mathbb{R}^n$.
`Objectivo:` Calcular $\text{proj}_V(b)$ e $\text{proj}_{V^\perp}(b)$.

(1) Determinar bases $\{v_1, \ldots, v_k\}$ de $V$ e $\{w_1, \ldots, w_{n-k}\}$ de $V^\perp$.

Então $\{v_1, \ldots, v_k, w_1, \ldots, w_{n-k}\}$ é uma base de $\mathbb{R}^n$.

(2) Escrever $b$ como CL dos vetores da base anterior,

$$b = \underbrace{\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k}_{p \in V} + \underbrace{\beta_1 w_1 + \cdots + \beta_{n-k} w_{n-k}}_{(b-p) \in V^\perp},$$

onde $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_{n-k})$ é a solução única do sistema PD,

$$\left[\begin{array}{ccccccc|c} v_1 & \cdots & v_k & w_1 & \cdots & w_{n-k} & b \end{array}\right].$$

(3) Então
$$\begin{cases} \text{proj}_V(b) &= \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k \quad (= p \in V), \\ \text{proj}_{V^\perp}(b) &= \beta_1 w_1 + \cdots + \beta_{n-k} w_{n-k} \quad (= b - p \in V^\perp). \end{cases}$$



# Exemplificação do método das bases

## Exercício

Considere $v_1 = (1, 2, -1, 1)$, $v_2 = (0, 1, 0, 1)$, $v_3 = (1, 3, -1, 2)$, $V = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ e $b = (3, -1, -1, 2)$. Calcule $\text{proj}_V(b)$ e $\text{proj}_{V^\perp}(b)$.

**Resolução**: Tem-se $V = \mathcal{C}(A)$ com $A = [\, v_1 \;\; v_2 \;\; v_3 \,]$. Aplicando a fase descendente do método de Gauss obtém-se,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \to \cdots \to \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A'.$$

Logo $\dim V = \dim \mathcal{C}(A) = \text{car}(A) = 2$ (nº de *pivots* de $A'$) e portanto $\dim V^\perp = \dim \mathbb{R}^4 - \dim V = 4 - 2 = 2$. Em particular, não se pode calcular diretamente a projeção de $b$ sobre $V$ nem sobre $V^\perp$.

Vamos por isso aplicar o método das bases para calcular a $\text{proj}_V(b)$ e a $\text{proj}_{V^\perp}(b)$, seguindo os 3 passos do algoritmo do slide anterior.

# Resolução do exercício do slide anterior (cont.)

(1) Uma base para $V = \mathcal{C}(A)$ é $\{v_1, v_2\}$, que corresponde às colunas de $A$ associadas às colunas com *pivot* em $A'$. Para determinarmos uma base para $V^\perp = \mathcal{C}(A)^\perp = \mathcal{N}(A^T)$ ([14]) vamos reduzir $[\,A^T \mid \vec{0}\,]$. Tem-se :

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right] \to \cdots \to \left[\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow \begin{cases} x_1 &= & x_3 + x_4 \\ x_2 &= & -x_4 \end{cases}$$

Logo,

$$\mathcal{N}(A^T) = \{(x_3 + x_4, -x_4, x_3, x_4) \,:\, x_3,\ x_4 \in \mathbb{R}\} = \{x_3(1,0,1,0) + x_4(1,-1,0,1) \,:\, x_3,\ x_4 \in \mathbb{R}\}.$$

Logo uma base de $V^\perp = \mathcal{N}(A^T)$ é $\{w_1, w_2\}$ com $w_1 = (1,0,1,0)$ e $w_2 = (1,-1,1,0)$.

Reunindo as bases de $V$ e $V^\perp$ obtém-se a base $\{v_1, v_2, w_1, w_2\}$ de $\mathbb{R}^4$ (note-se que $v_1, v_2 \perp w_1, w_2$).

(2) Reduzindo a matriz ampliada $[\,v_1 \;\; v_2 \;\; w_1 \;\; w_2 \mid b\,]$, obtém-se (confirme!)

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \to \cdots \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right],$$

donde resulta a CL, $b = \underbrace{1\,v_1 - 1\,v_2}_{\in V} + \underbrace{0\,w_1 + 2\,w_2}_{\in V^\perp}$.

(3) Então $\begin{cases} \text{proj}_V(b) &= v_1 - v_2 = (1,1,-1,0) \in V, \\ \text{proj}_{V^\perp}(b) &= 0\,w_1 + 2\,w_1 = (2,-2,0,2) \in V^\perp. \end{cases}$

[14] $V = \mathcal{C}(A) = \mathcal{C}(B)$, onde $B = [\,v_1 \;\; v_2\,]$ é a matriz da base, e podemos também calcular $V^\perp = \mathcal{N}(B^T)$.



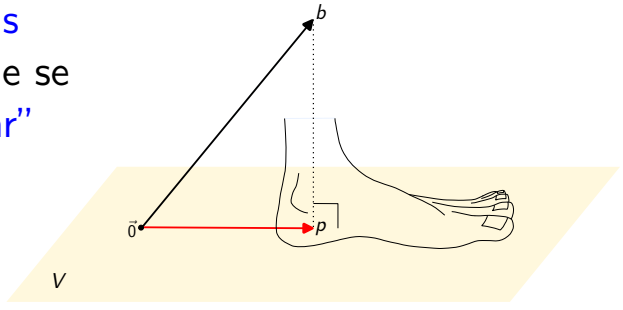
# Conceito de distância de um vetor a um subespaço vetorial

## Definição de distância de um vetor a um subespaço vetorial

Dados $b \in \mathbb{R}^m$ e $V$ subespaço vetorial de $\mathbb{R}^m$ define-se distância de $b$ a $V$, que se denota-se por $d(b, V)$, como sendo a distância entre $b$ e o vetor $p$ de $V$ que se encontra mais próximo de $b$ ([15]), isto é,

$$d(b, V) = d(b, p) = \min_{v \in V} d(b, v).$$

Intuitivamente, o vetor de $V$ mais próximo de $b$ é o vetor $p \in V$ que se encontra no "Pé da Perpendicular" de $b$, isto é, $p = \text{proj}_V(b)$.
Mais precisamente, tem-se o resultado do próximo slide.




[15] que se pode mostrar que existe sempre e é único!