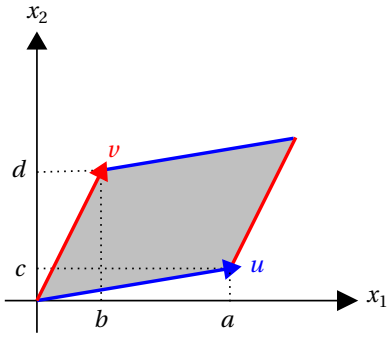
Capítulo 4

Determinantes

Exercício 44. Considere o paralelogramo definido pelos vetores $u=(a,c)$ e $v=(b,d)$ da figura abaixo. Mostre, sem usar o conceito de determinante, que a sua área vem dada por $ad-bc$.



Exercício 45. Sabendo que o volume da esfera de raio 1 é $\frac{4}{3}\pi$ deduza o volume da esfera de raio $r>0$.

Exercícios 46.

1. Calcule o determinante de cada uma das seguintes matrizes e interprete geometricamente o resultado obtido nas alíneas a), b) e c).

   a) $\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}, \alpha\in\mathbb{R}$ b) $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 18 \\ 1 & 3 & 15 \\ 1 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -5 \end{bmatrix}$

   d) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 5 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 5 & 6 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

2. Indique quais das matrizes acima não são invertíveis.

Exercícios 47. Prove os seguintes resultados para matrizes 4×4 usando a regra de Laplace.

1. Uma matriz com linhas ou colunas de zeros tem determinante nulo.
2. Uma matriz com linhas ou colunas proporcionais tem determinante nulo.
3. O determinante de uma matriz triangular superior é o produto dos elementos da diagonal principal da matriz.

Exercício 48. [Exercício 16.4 (c) revisitado] Usando o conceito de deteminante discuta a independência linear do conjunto de vetores

$$\{(0,\gamma,-\beta),(-\gamma,0,\alpha),(\beta,-\alpha,0)\},$$

para todo o $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$.

Exercício 49. Considere a matriz $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0\\ 2 & \alpha & 1\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} u & v & w\end{bmatrix}$, com $\alpha\in\mathbb{R}$.

Indique os valores de α para os quais:

a) As colunas de A definem uma base de $\mathbb{R}^3$.

b) O paralelipípedo definido por u, v, w é unitário, isto é, tem volume 1.

c) $\det(A^TA)=1$.

d) $\det(2A^{-1})=1$.