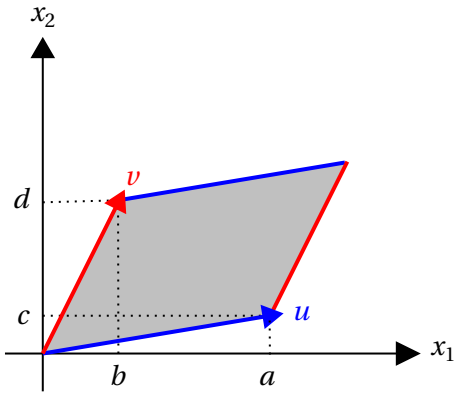
Capítulo 4

Determinantes

Exercício 44. Considere o paralelogramo definido pelos vetores $u=(a,c)$ e $v=(b,d)$ da figura abaixo. Mostre, sem usar o conceito de determinante, que a sua área vem dada por $ad-bc$.



Exercício 45. Sabendo que o volume da esfera de raio 1 é $\frac{4}{3}\pi$ deduza o volume da esfera de raio $r>0$.

Exercícios 46.

1. Calcule o determinante de cada uma das seguintes matrizes e interprete geometricamente o resultado obtido nas alíneas a), b) e c).

a) $\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}, \alpha\in\mathbb{R}$ b) $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 18 \\ 1 & 3 & 15 \\ 1 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -5 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 5 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 5 & 6 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

a) 1 (corresponde à área do quadrado unitário definido pelo conjunto ortonormado de vetores $\{(\cos\alpha,-\sin\alpha),(\sin\alpha,\cos\alpha)\}$) **b) 18** (o paralelipípedo definido pelas 3 colunas da matriz tem volume 18) **c) 0** (o paralelipípedo definido pelas 3 colunas da matriz tem volume nulo e portanto é degenerado). **d) 11** **e) 65** **f) 42**

2. Indique quais das matrizes acima não são invertíveis.

   Apenas a matriz da alínea (c)

Exercícios 47. Prove os seguintes resultados para matrizes 4×4 usando a regra de Laplace.

1. Uma matriz com linhas ou colunas de zeros tem determinante nulo.
2. Uma matriz com linhas ou colunas proporcionais tem determinante nulo.
3. O determinante de uma matriz triangular superior é o produto dos elementos da diagonal principal da matriz.

Exercício 48. [Exercício 16.4 (c) revisitado] Usando o conceito de deteminante discuta a independência linear do conjunto de vetores

$$\{(0,\gamma,-\beta),(-\gamma,0,\alpha),(\beta,-\alpha,0)\},$$

para todo $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$.

É l.d. $\forall\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$

Exercício 49. Considere a matriz $A=\begin{bmatrix}2&-1&0\\2&\alpha&1\\0&1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u&v&w\end{bmatrix}$, com $\alpha\in\mathbb{R}$.

Indique os valores de α para os quais:

a) As colunas de A definem uma base de $\mathbb{R}^3$.

b) O paralelipípedo definido por u,v,w é unitário, isto é, tem volume 1.

c) $\det(A^TA)=1$.

d) $\det(2A^{-1})=1$.

a) $\alpha\neq-\frac{1}{2}$ **b) e c)** $\alpha=-\frac{1}{4}$ ou $\alpha=-\frac{3}{4}$ **d)** $\alpha=\frac{3}{2}$