Modelos Matemáticos e Aplicações (18/19)

Módulo I – Revisão dos fundamentos de Probabilidade e Estatística com apoio do R

Manuela Neves

ISA/ULisboa

21 Fev 2019

Plano da aula 2

1. O conceito de variável aleatória – probabilidade
2. Principais modelos discretos
   - A distribuição uniforme discreta
   - A distribuição binomial
   - A distribuição binomial begativa
   - A distribuição de Poisson
3. Alguns Modelos Contínuos
   - A distribuição normal ou de Gauss
   - O Teorema Limite Central
   - A distribuição uniforme contínua
   - As distribuições exponencial e gama
   - A distribuição beta
4. Exemplo de um exercício no R

AULA 2

Os principais modelos de probabilidade discretos e contínuos.

O conceito de variável aleatória

Quando se realiza uma experiência aleatória, pode associar-se a cada resultado da experiência um (ou mais) valores reais - diz-se que temos uma variável aleatória ou (um vector aleatório).

Uma variável aleatória costuma representar-se por $\boldsymbol{X}$.

Um variável aleatória pode ser:

- discreta - por exemplo o número de sementes germinadas; o registo, a intervalos regulares, do número de pessoas em fila de espera na caixa de um supermercado;
- contínua - por exemplo o peso de um indivíduo; a largura, o comprimento de um folha.

Variável aleatória - probabilidade

Associadas a cada variável aleatória (v.a.) existem:

- uma função massa de probabilidade, se X discreta, ou uma função densidade, se X contínua.
- uma função real $\boldsymbol{F}$, a que se chama função distribuição cumulativa tal que

$$F(x) = P[X \leq x]$$

Exemplos de cálculo de uma probabilidade:

1. $P(a < X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = F(b) - F(a)$;
2. $P(X = a) = F(a) - F(a^-)$ onde $F(a^-) = lim_{x \to a^-} F(x)$
3. $P(a < X < b) = P(X < b) - P(X \leq a) = F(b^-) - F(a)$;

Principais modelos discretos

A distribuição uniforme discreta

Definição Uma v.a. X diz-se ter distribuição uniforme discreta se toma os valores $x_1, ..., x_n$ com probabilidades $1/n, ..., 1/n$, i.e.
$P(X = x_i) = 1/n, \quad i = 1, ..., n.$

Caso particular

$$X = \begin{cases} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1/n & 1/n & \cdots & 1/n \end{cases}$$

Valor médio e variância

$$E[X] = \frac{n+1}{2} \qquad\qquad Var[X] = \frac{n^2-1}{1}$$

Instrução no R para simular `> sample(v,size,rep=TRUE)`

`v` vector com os valores que a variável pode tomar

A função sample( )

A função `sample` - permite criar uma amostra aleatória a partir dos elementos de um vector, com ou sem reposição, com probabilidades iguais ou não.

```
>sample(1:20,15)
```

Selecciona aleatoriamente 15 números de 1 a 20 sem reposição
a omissão é “sem reposição”.

Para seleccionar com reposição com diferentes probabilidades fazer, por exemplo:

```
>pb<-c(rep(0.1,3),.2,.3,.2);pb
>sample(1:6,30,rep=T,prob=pb)
```

Se a probabilidade for a mesma pode omitir-se.

Nota: para gerar sempre a mesma sucessão fazer `>set.seed(nº )`

A distribuição uniforme discreta no R

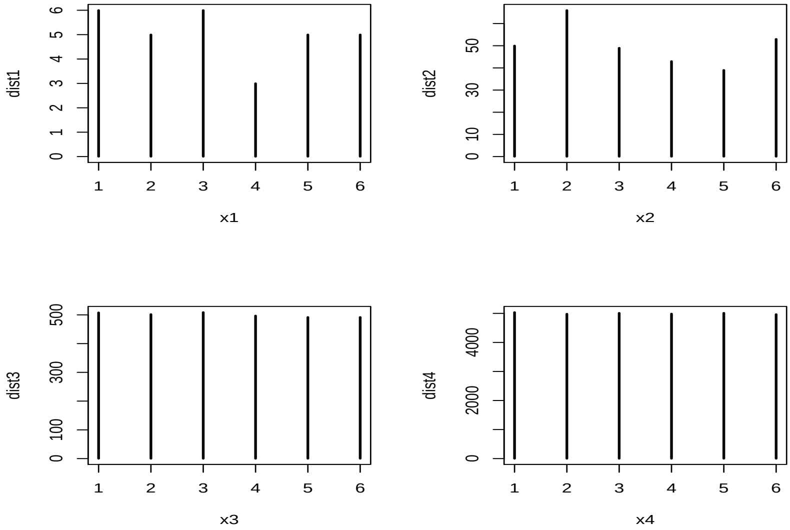
```
> par(mfrow=c(2,2))
> x1<-sample(1:6,30,rep=T);x1
> dist1<-table(x1);dist1
> plot(dist1)
```

Repetir para 300, 3000 e 30000. (ver variáveis x_2, x_3 e x_4 nos gráficos do *slide* seguinte.

Nota: Podia definir-se uma função, por exemplo:

```
> dado<-function(n) sample(1:6,n,replace=T)
> d1<-dado(30);table(d1)
> table(dado(30))  # Haverá alguma diferença?
> dado(300);dado(3000)
```

Gráficos de vários lançamentos



A distribuição binomial

Quando se realizam ***n*** provas de Bernoulli independentes, a variável que <u>conta o número de sucessos</u> que ocorrem diz-se ter distribuição binomial e representa-se por $X \frown Binom(n,p)$, sendo p a probabilidade de <u>sucesso</u>. A probabilidade de insucesso, $1-p$, é costume representar por q.

X toma os valores $x = 0, 1, 2, ..., n$ com probabilidades

$P[X = x] = \binom{n}{x}\, p^x\, (1-p)^{n-x}$

Valor médio e variância

$E[X] = np$ $\qquad Var[X] = np(1-p) = npq$

Para determinar o valor daquelas probabilidades, quantis ou a função distribuição cumulativa o R possui funções já definidas para os modelos implementados.

Funções no R para os modelos existentes

- **d**função $(x, ...)$ - permite obter a função massa de probabilidade (modelo discreto) ou a função densidade (modelo contínuo) em x;
- **p**função$(q, ...)$ - permite obter a função de distribuição cumulativa, i.e., devolve a probabilidade de a variável ser menor ou igual a q;
- **q**função $(p, ...)$ - permite calcular o quantil associado à probabilidade p;
- **r**função $(n, ...)$ - permite gerar uma amostra de n números pseudo-aleatórios do modelo especificado.

Significado:

`density, probability, quantile, random`

Exercícios

Exercício Vamos experimentar a utilização das funções d, p, q, r. Considere-se uma *Binomial*$(n = 10, p = 0.2)$.

```
> x<- 0:10
> dbinom(x,size=10,prob=0.2)
> pbinom(3,size=10,prob=0.2,lower.tail = TRUE) #dá P[X<=3]
> qbinom(0.75, size=10, prob=0.2, lower.tail = TRUE)
+       #dá o quantil de probabilidade 0.75
> rbinom(5, size=10, prob=0.2)
> pbinom(3, size=10, prob=0.2, lower.tail = F) #dá P[X>3]
```

O quantil é definido como o menor valor χ_p tal que $F(\chi_p) \geq p$, sendo F a função distribuição cumulativa.

```
> par(mfrow=c(1,2))
> plot(x,dbinom(x,size=10,prob=0.2),type="h")
> plot(x,dbinom(x,size=10,prob=0.4),type="h")
```

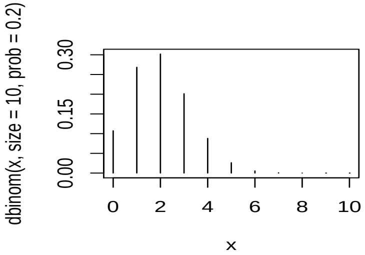
Exercícios (continuação)

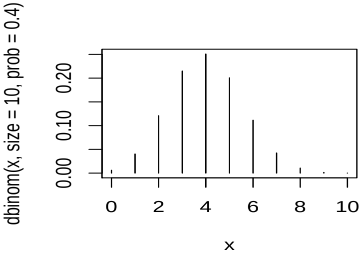
Para exemplificar a distribuição binomial teórica e a simulada (geração de números pseudo-aleatórios)

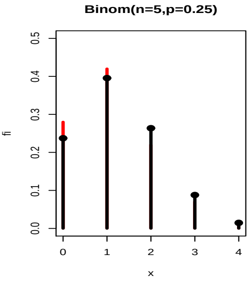
```
> par(mfrow=c(1,3))
> n<-5;p<-0.25
> x<-rbinom(100,n,p) # 100 random numbers
> ni<-table(x);ni
> fi<-ni/sum(ni);fi
> dbinom(0:n,size=5,prob=0.25)
> plot(fi,type = "h", col = "red",lwd=3,
+    main="Binom(n=5,p=0.25)",ylim=c(0,.5))
> xvals<-0:n;points(xvals,dbinom(xvals,n,p),type="h",lwd=3)
> points(xvals,dbinom(xvals,n,p),type="p",lwd=3)
```

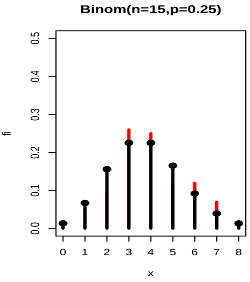
... Repetir com n=15, n=50.

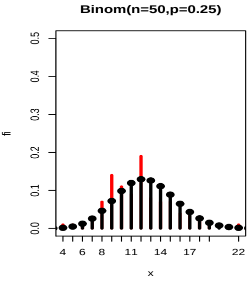
Exemplos (continuação)











Mais modelos de probabilidade

No R o modelo Binomial Negativo surge associado a contagens do número de insucessos que se observam até obter k "sucessos", num contexto de provas de Bernoulli independentes.

A variável X, nº de contagens nas condições acima referidas diz-se ter **distribuição Binomial Negativa** e é costume representar-se por $\boldsymbol{X \frown BN(k, p)}$

$\boldsymbol{p}$ é a probabilidade constante de "sucesso" de prova para prova
$\boldsymbol{k}$ é o número de "sucessos" que se pretende obter.

A distribuição binomial negativa

Caracterização da v.a. $X \frown BN(k,p)$:

Valores $\quad x = 0, 1, 2, \ldots$

Probabilidades $\quad P\,[X = x] = \binom{x+k-1}{x} p^k q^x$

$0 < p < 1, \qquad q = 1 - p$

Valor médio e variância de $X \frown BN(k,p)$

$E[X] = \frac{k\,q}{p} \qquad Var[X] = \frac{kq}{p^2}$

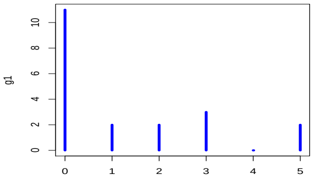
Exemplo em R

```
> x <- 0:15 #vector de valores da variável
> dnbinom(x,size=6, prob= 0.4)   #probabilidade de se
+ # verificarem  0 a 15 insucessos  até haver 6 sucessos
+ #outra parametrização que usa o valor médio indicado acima
> dnbinom(x, mu = 9, size = 6)
```

A distribuição Geométrica

Se $k = 1$, isto é, se pretendemos determinar o número de insucessos (falhas) até obter o 1º sucesso, a variável X diz-se ter **distribuição Geométrica**, $\quad X \frown Geo(p)$

```
> Ni <- rgeom(20, prob = 1/4)
> g1<-table(factor(Ni, 0:max(Ni)))
> plot(g1)
```



A distribuição de Poisson

Definição A v.a X que conta o número de sucessos que ocorrem num dado intervalo de tempo ou domínio (independentemente do número que ocorre em qualquer outro intervalo ou domínio disjunto) diz-se ter distribuição de Poisson.

Depende apenas do parâmetro $\boldsymbol{\lambda} \longrightarrow$ número médio de sucessos que ocorrem no intervalo de tempo (ou na região especificada).

Representa-se por $X \frown P(\lambda)$ e a lei de probabilidade é:

$$\boldsymbol{P}[X = x] = \frac{e^{-\lambda}\ \lambda^x}{x!}, \qquad x = 0, 1, 2....$$

Valor médio e variância

$E[X] = \lambda \qquad Var[X] = \lambda.$

```
> diff(ppois(c(47, 50), lambda = 50))   # P[47 < X <=50]
> ppois(50,50)-ppois(47,50)  # verificar que é o mesmo
```

A distribuição normal ou de Gauss

Tem um papel fulcral nas Probabilidades e Estatística, porque:

- muitas variáveis biométricas têm uma distribuição muito próxima da normal;
- por vezes uma variável que não é normal pode ser transformada de um modo simples numa outra com distribuição normal;
- a parte central de muitos modelos não normais é por vezes razoavelmente bem aproximada por uma distribuição normal.

Uma v.a. contínua X diz-se ter **distribuição normal** com parâmetros μ e σ e representa-se por $X \frown \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ se a sua f.d.p. é da forma:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\ \sigma} exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$$

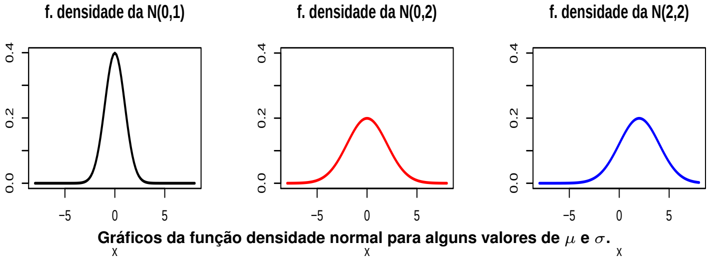
$$-\infty < x < +\infty, \qquad -\infty < \mu < +\infty, \qquad 0 < \sigma < +\infty$$

A distribuição normal ou de Gauss

Propriedades da curva densidade da distribuição normal

1. É simétrica relativamente a μ.
2. É uma curva unimodal,   a moda é μ.
3. Tem pontos de inflexão em $\mu + \sigma$ e $\mu - \sigma$.

Se $\mu = 0$ e $\sigma = 1$ a variável aleatória com distribuição $\mathcal{N}(0, 1)$ chama-se **normal reduzida** e costuma representar-se por Z,
$Z \frown \mathcal{N}(0, 1)$



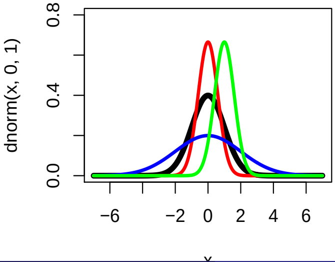
Gráficos da função densidade normal para alguns valores de μ e σ.

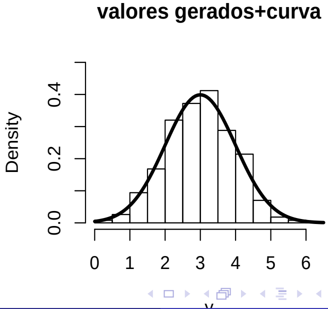
Exercícios com a distribuição normal no R

```
#cálculos e gráficos com a normal
> pnorm(1.96)
> pnorm(-1.96)
> pnorm(3,mean=5,sd=2)
> qnorm(0.75,mean=5,sd=1)
> qnorm(0.75,mean=5,sd=1,lower.tail=T)
> qnorm(0.25,mean=5,sd=1,lower.tail=F)
+             #graficos
> par(mfrow=c(1,2))
> x<-seq(-7,7,.01)
> plot(x,dnorm(x,0,1),type="l",ylim=c(0,.8),lwd=5)
> lines(x,dnorm(x,0,.6),col="red",lwd=3)
> lines(x,dnorm(x,0,2),col="blue",lwd=3)
> lines(x,dnorm(x,1,.6),col="blue",lwd=3)
```

A distribuição normal (gráficos)

```
# gerar valores (continuação do exercício)
> y<-rnorm(1000,mean=3,sd=1)
> hist(y,freq=F,ylim=c(0,0.5),
+  main="valores gerados+curva",col=gray(.9))
> curve(dnorm(x,mean=3,sd=1),add=T,lwd=3)
```





Resultados importantes com a distribuição normal

- Seja $X \frown \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ então a v.a. $\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ tem distribuição normal reduzida, i.e., $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma} \frown \mathcal{N}(0,1)$.
- Sejam X_i n v.a. normais independentes e semelhantes, i.e., tendo todas o mesmo valor médio μ e a mesma variância σ^2.
  As variáveis aleatórias soma e média, definidas respectivamente como $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ e $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$
  têm distribuição normal assim definida
  $S_n \frown \mathcal{N}(n\mu, \sigma\sqrt{n})$ e $\overline{X}_n \frown \mathcal{N}(\mu, \sigma/\sqrt{n})$.

O Teorema Limite Central

Vimos que a soma de normais independentes é ainda uma normal. Mas a distribuição aproximada da soma de n variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, sob certas condições é também normal.

O Teorema limite central

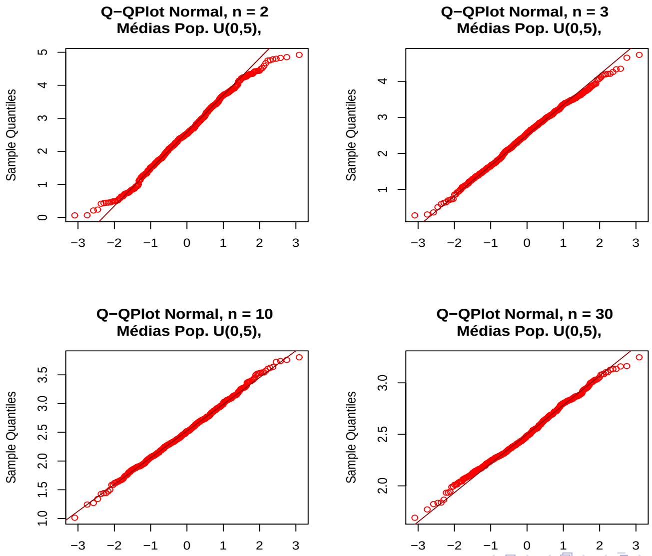
Sejam $X_1, ..., X_n$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com valor médio μ e variância σ^2 (finita). Se n 'grande' a v.a. $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, verifica:

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0,1) \quad \text{e também se tem } \frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0,1).$$

O Teorema Limite Central...exercício

```
> # População Uniforme(0,5)
> par(mfrow=c(2,2))
> am<-500
> vec.med<-c(rep(0,am))
> n<-c(2,3,10,30)
> for(j in 1:4)
     + {for(i in 1:am)
     + {x<-runif(n[j],0,5)
     + vec.med[i]<-mean(x)}
     + qqnorm(vec.med,main=paste("Q-QPlot Normal, n =",n[j],
     + "n","Médias Pop. U(0,5),"),xlab=" ",
     +  col="red")
     + qqline(vec.med,col="darkred")}
```

O Teorema Limite Central...exercício



Aplicações do Teorema Limite Central

Seja X uma v.a. com distribuição binomial com valor médio $\mu = np$ e variância $\sigma^2 = npq$.

$X \frown \mathcal{B}(n, p)$, i.e., valor médio $\mu = np$ e variância $\sigma^2 = npq$

$$\frac{X - np}{\sqrt{npq}} \sim \mathcal{N}(0, 1) \qquad \text{se} \qquad n \to \infty$$

Regra prática Se na distribuição binomial, $np > 5$ e $nq > 5 \Longrightarrow$ a aproximação pela distribuição normal é boa.

Aplicações do Teorema Limite Central

$X \frown P(\lambda)$

Se $\lambda \to \infty$ então $\dfrac{X-\lambda}{\sqrt{\lambda}} \sim \mathcal{N}(0,1)$.

Mais uma convergência

Se na distribuição binomial $n \to \infty$ e p pequeno (digamos $p < 0.05$ e $n > 20$) $\boldsymbol{X \frown B(n,p) \sim P(np)}$

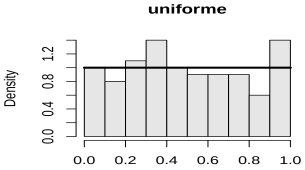
Outras distribuições contínuas

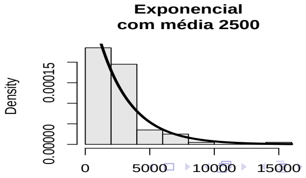
Distribuição uniforme contínua e exponencial

```
> u<-runif(100)
> hist(u,freq=F,col=gray(.9),main="uniforme")
> curve(dunif(x),add=T,lwd=3)
```

... e Exponencial de valor médio 2500

```
> x<-rexp(100,1/2500)
> hist(x,probability=TRUE,col=gray(.9),main="Exponencial
   +   com média 2500")
> curve(dexp(x,1/2500),add=T)
```





A distribuição gama

Em muitas áreas das ciências há ainda muitas situações em que a lei de Gauss não serve para modelar o fenómeno.

Comecemos por referir brevemente a **distribuição gama** que deve o seu nome à **função gama**, estudada em muitas áreas da matemática, assim definida:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}\, e^{-x}\, dx \qquad \text{para } \alpha > 0$$

Algumas propriedades da função gama:

- $\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)\Gamma(\alpha - 1)$ (fórmula de recorrência)
- No caso de $\alpha = n$ inteiro, é fácil verificar que se tem

$$\Gamma(n) = (n-1)(n-2)...\Gamma(1) = (n-1)!$$

Mais algumas propriedades da função gama:

- $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$
- As derivadas da função gama são assim definidas:

$$\Gamma^{(k)}(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1}\ (log x)^k\ e^{-x}\ dx$$

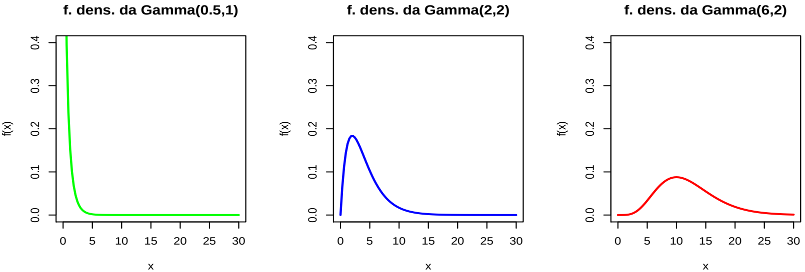
Alguns valores particulares das derivadas úteis em muitas aplicações são

$\Gamma^{'}(1) = \gamma = 0.57722...$valor é designado por **constante de Euler**
$\Gamma^{''}(1) = \gamma^2 + \pi^2/6 = 1.97811...$

A distribuição gama

Uma v.a. diz-se ter **distribuição gama** de parâmetros α e β, ($\alpha > 0,\ \beta > 0$) e escreve-se $X \frown G(\alpha, \beta)$ se (α– parâmetro de forma e β –parâmetro de escala) função densidade é:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta^\alpha\, \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1}\ e^{-x/\beta} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$



Gráficos da função densidade de uma v.a. com distribuição $G(1/2, 1)$, $G(2, 2)$ e $G(6, 2)$, da esquerda para a direita, respectivamente.

A distribuição gama

Valor médio e variância de $X \frown G(\alpha, \beta)$

$E[X] = \alpha\ \beta \qquad Var[X] = \alpha\ \beta^2$

Um caso particular muito importante é o que se obtém fazendo $\boldsymbol{\alpha = 1}$. A v.a. resultante diz-se ter **distribuição exponencial**, foi falada atrás, representa-se por $X \frown Exp(\beta)$ e a função densidade é assim definida,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta} e^{-x/\beta} & x > 0\ \beta > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

Valor médio e variância

$E[X] = \beta$ $\qquad$ $Var[X] = \beta^2$

A distribuição exponencial tem sido largamente usada como um modelo de problemas relativos a duração de vida, teoria da fiabilidade, tempos de espera ,etc.

Propriedade

Se X_i, $i = 1, ..., n$ são variáveis aleatórias independentes e semelhantes, com distribuição $Exp(\beta)$, então

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \frown G(n, \beta).$$

A distribuição exponencial

Observações:

- Existe uma relação muito importante entre a distribuição exponencial e a distribuição de Poisson, que surge muitas vezes na prática. Estando a observar a ocorrência de certos acontecimentos em intervalos de tempo, pretendemos caracterizar T o tempo ao fim do qual se verifica a primeira ocorrência.

Teorema

Seja X uma v.a. de Poisson de parâmetro λ. Seja T a v.a. que designa o tempo de espera pela ocorrência do primeiro acontecimento, então T tem distribuição exponencial, $T \frown Exp[\beta)$, de parâmetro $\beta = 1/\lambda$.

A distribuição beta

Uma v.a. X contínua diz-se ter **distribuição beta** de parâmetros (m, n) e escreve-se $X \frown Be(m, n)$ se a sua função densidade é da forma

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{B(m,n)} x^{m-1}(1-x)^{n-1} & 0<x<1 \qquad m>0, n>0 \\ 0 & \text{outros valores de } x \end{cases}$$

onde $B(m, n)$ é a **função beta** assim definida

$$B(m, n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx$$

A distribuição beta

Propriedades

1. $B(m,n) = B(n,m)$
2. $B(1,1) = 1$
3. $B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \pi$
4. $B(m,n) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{m-1}}{(1+x)^{m+n}} dx$

Valor médio e variância da distribuição beta

$$E[X] = \frac{m}{m+n} \qquad var[X] = \frac{mn}{(m+n)^2(m+n+1)}$$

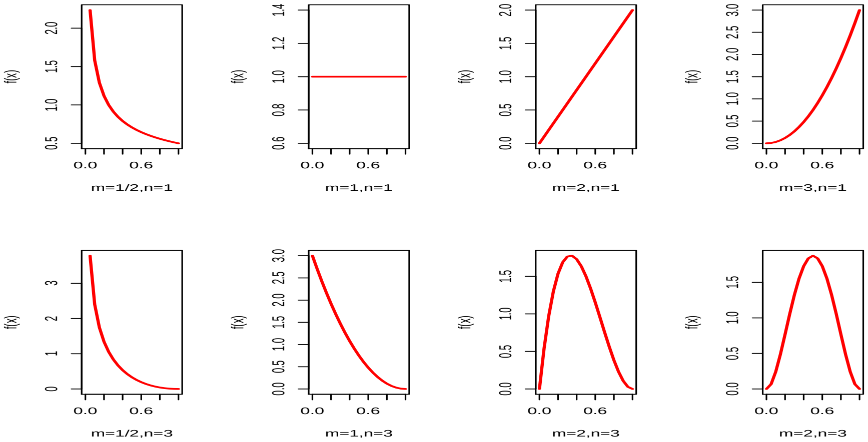
A distribuição beta

A função densidade da v.a. com distribuição beta apresenta, como dissémos, uma grande variabilidade de formas.
Assim podemos caracterizar o aspecto da densidade em função do valor dos parâmetros.

– se $m > 1, n > 1 \Rightarrow$ existe uma única moda em $x = (m-1)/(m+n-2)$
– se $m < 1, n < 1 \Rightarrow$ existe uma antimoda (forma de U)
– se $(m-1)(n-1) \leqslant 0 \Rightarrow$ forma de J
– se $m = n \Rightarrow$ simetria relativamente a 0.5.

A distribuição beta

Nas figuras seguintes, vejam-se alguns desses aspectos:



A distribuição beta

Sejam X e Y variáveis aleatórias independentes tais que $X \frown G(a_1, b_1)$ e $Y \frown G(a_2, b_2)$, então

$$X|(X+Y) \frown Be(a_1, a_2).$$

A distribuição beta, acabada de estudar diz-se estar na forma estandardizada e é de facto a forma mais usada. A sua forma mais geral apresenta quatro parâmetros (a, b, m, n) e a função densidade é

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{B(m,n)} \frac{(x-a)^{m-1}(b-x)^{n-1}}{(b-a)^{m+n+1}} & a<x<b \qquad m>0, n>0 \\ 0 & \text{outros valores de x} \end{cases}$$

RESUMO de algumas distribuições no R

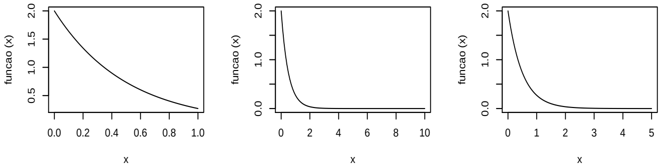
Nome da distribuição no R	Função	Argumentos
Beta	beta	shape1, shape2
Binomial	binom	size, prob
Cauchy	cauchy	location, scale
Chisquare	chisq	df
Exponential	exp	rate
FDist	f	df1, df2
GammaDist	gamma	shape, scale
Geometric	geom	prob
Hypergeometric	hyper	m, n, k
Lognormal	lnorm	meanlog, sdlog
Logistic	logis	location, scale
NegBinomial	nbinom	size, prob
Normal	norm	mean, sd
Poisson	pois	lambda
TDist	t	df
Uniform	unif	min,max
Weibull	weibull	shape, scale

Exemplo de um exercício no R

Considera-se a seguinte função $f(x) = \begin{cases} 2\,e^{-2x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$

Vamos ver que f é uma função densidade e calcular $P[X > 1]$ e $P[0.2 < X < 0.8]$

```
>funcao<-function(x) {
+      fx<-ifelse(x<0,0,2*exp(-2*x))
+      return(fx)}
>par(mfrow=c(1,3))
>plot(funcao);plot(funcao,0,10);plot(funcao,0,5)
```



Exemplo de um exercício no R

```
>integrate(funcao,0,Inf)
>integrate(funcao,1,Inf)
>res<-integrate(funcao,0,1);res;str(res)
>1-res$value

1 with absolute error < 5e-07
0.1353353 with absolute error < 2.1e-05
0.8646647 with absolute error < 9.6e-15
List of 5
$ value       : num 0.865
$ abs.error   : num 9.6e-15
$ subdivisions: int 1
$ message     : chr "OK"
$ call      : language integrate(f =funcao,lower = 0,upper = 1)
    attr(*, "class")= chr "integrate"
 [1] 0.1353353
```