Exercícios Variados de Matemática 1

(1º teste)

1. Indique o domínio das seguintes funções:

   (a) $f(x) = \sqrt{(2-x)\ln(x)}$.

   (b) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+x^2}}{\ln(4-x^2)}$.

2. Considere as funções, $f(x) = \sqrt{\ln(4-x)}$ e $g(x) = \operatorname{arctg}(2x) + \dfrac{\pi}{2}$.

   (a) Indique o domínio de f.

   (b) Indique as expressões de $g \circ f$ e $f \circ g$.

   (c) Justifique que g é invertível em $\mathbb{R}$ e indique a inversa.

   (d) Calcule $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$.

3. Calcule as seguintes derivadas.

   (a) $\sin^3 x$; $\cos^3 x$; $\sin^3(x)\cos^3(x)$.

   (b) $\sin(\cos x)$; $\cos(\sin x)$.

   (c) $\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + 1$.

   (d) $\ln(\cos x)$; $\ln(\sin x)$.

   (e) $\sqrt{e^{x^2-1}}$; $\sqrt{(e^x)^2 - 1}$.

   (f) $\ln(\ln x)$.

   (g) $e^{\cos^2 x}$; $e^{\sin^2 x}$; $e^{\cos^2 x}e^{\sin^2 x}$.

   (h) $\operatorname{arctg}(x^2)$; $\operatorname{arctg}(\sin x)$; $\operatorname{arctg}(e^x)$.

   (i) $\arcsin(x^2)$; $\arcsin(\cos x)$; $\arcsin(e^x)$.

   (j) $(e^x \sin^2 x)^2$.

   (k) $(e^{\sin x}\ln x)^2$.

4. Calcule (se existirem) os seguintes limites:

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \frac{1-\cos x}{\arcsin x}$.

   (b) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\arcsin x}{\arcsin(2x)}$.

   (c) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\sin x \operatorname{arctg} x}{x}$.

   (d) $\displaystyle\lim_{x\to0} x e^{\frac{1}{x}}$.

   (e) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{\operatorname{tg} x}{\ln(\pi - 2x)}$.

   (f) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\ln\left(\frac{1}{x}\right)$.

   (g) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(\frac{x}{1+x}\right)$.

   (h) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)$.

   * (i) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x})$. (Sugestão: pôr em evidência ...)

   (j) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{e^x - 1 - x}{\ln(1+x) - x}$.

   (k) $\displaystyle\lim_{x\to0} \sin x \ln(\sin x)$.

   (l) $\displaystyle\lim_{x\to0^+} (\sin x)^{\frac{1}{x}}$.

   (m) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{5x}$.

   (n) $\displaystyle\lim_{x\to0^+} (1+5x)^{\frac{1}{x}}$.

   (o) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} (\operatorname{tg} x)^{\sin x}$.

   (p) $\displaystyle\lim_{x\to0^+} (e^x - 1)^x$.

   (q) $\displaystyle\lim_{x\to0^+} (\ln^2 x)^x$.

5. Sabendo que $f'(1) = 4$, calcule $\displaystyle\lim_{x\to1} \frac{f(x) - f(1)}{x^2 - 1}$.

6. Estude a derivabilidade de f no ponto de abcissa $x = 1$ onde

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{4}x^2, & x > 1 \\ \operatorname{arctg} x, & x \le 1. \end{cases}$$

7. Investigue a existência de derivada de $f(x) = |2x - x^2|$ em $x = 0$.

8. Sejam f e g funções deriváveis em $\mathbb{R}$ tais que $f(x) \neq 0$ para todo o $x \neq 0$, e seja $a \in \mathbb{R}$ tal que $f(a) = g(a) = 0$ e $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{g(x)}{f(x)} = 1$.

   Prove que $f'(a) = g'(a)$.

9. Considere a função $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$.

   (a) Determine o(s) ponto(s) do gráfico de f onde a reta tangente é perpendicular à reta de equação $x + 2y = 0$ e escreva a equação da reta tangente nesse(s) ponto(s).

(b) Determine $a, b \in \mathbb{R}$ de modo a que $f(x)$ e $g(x) = (x-a)^2 + b$ tenham a mesma reta tangente no ponto de abcissa $x = 1$, e indique uma equação dessa reta.

10. Utilize uma aproximação linear conveniente para calcular um valor aproximado para $\ln(0.9)$.

11. Construa a aproximação linear à função $f(x) = \sqrt{1-x}$ num ponto $a < 1$ e utilize o resultado para obter um valor aproximado para $\sqrt{0.99}$.

12. Utilizando uma aproximação linear conveniente calcule um valor aproximado para $\operatorname{arctg}(1.1) - \operatorname{arctg}(1)$.

13. Construa a aproximação linear para $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ num ponto a do seu domínio.

14. Estude as funções (domínio, assíntotas, monotonia e extremos e concavidades e pontos de inflexão) e esboce os seus gráficos.

    (a) $f(x) = x^2 e^x$.

    (b) $f(x) = e^{-x^2}$.

    (c) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.

15. Determine o ponto do gráfico de $y = \sqrt{x}$ que se encontra à menor distância do ponto $(1, 0)$. *

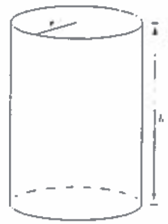
    $dist((a,b),(c,d)) = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}$

16. Pretende-se determinar as dimensões de uma folha de papel com 1 m^2 de área de forma a que deixando 20 cm de margem em cima e em baixo, e 5 cm de margem em cada lado, a área de impressão seja máxima.

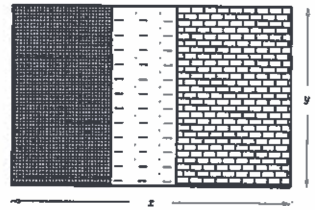
17. 2 lâmpadas de 5 e 40 Watts estão afastadas entre si 6m. Sabendo que a intensidade de iluminação que cada lâmpada produz é diretamente proporcional à sua potência e inversamente proporcional ao quadrado da distância da lâmpada, e que a intensidade de iluminação num dado ponto é a soma das intensidades das iluminações produzidas pelas 2 lâmpadas, determine o ponto menos iluminado da linha reta que une as duas lâmpadas.

18. Determine o raio r e a altura h de um cilíndro com volume 16π que minimizam a àrea total lateral do cilíndro (incluindo os topos).

* utilizar o dist²



19. Pretende-se cercar 3 canteiros para 3 tipos distintos de flores como na figura abaixo.



Dispõe-se de 40 m de vedação. Quais as dimensões x e y que maximizam a área total?

20. Calcule as seguintes primitivas.

    (a) $P\,(5x^9 - 12x^4 - 4x^3 + 1)$.

    (b) $P\,\dfrac{3}{\sqrt[6]{x^5}}$.

    (c) $P\left(3\sin x - \dfrac{\cos x}{6}\right)$.

    (d) $P\left(\sqrt[7]{x^6} - x^3\right)$.

    (e) $P\,(1+2x)^3$

    (f) $P\,\dfrac{2x-5}{x^3}$.

    (g) $P\,\dfrac{x^2+1}{x+2}$.

    (h) $P\left(\dfrac{x-x^3}{1+x^4}\right)$.

    (i) $P\left(\dfrac{x+2}{x^2+1} + \dfrac{\sin x}{\cos^2 x}\right)$.

(j) $P\dfrac{\ln(x^2+1)}{x^2}$.

(k) $P\sqrt{x}\ln x$.

(l) $P\dfrac{e^x+e^{2x}}{1+e^{2x}}$.

(m) $P\dfrac{2\sin x}{1+\cos^2 x}$.

(n) $P\sin^3 x$.

(o) $P(x^2+1)e^x$.

(p) $Pe^{2x}\cos x$.

(q) $Px\,\mathrm{arctg}(x^2)$.

(r) $Px\sec^2 x$.

(s) $P\dfrac{\sqrt{1+\ln x}}{x}$.

(t) $P\dfrac{1}{(1+\ln x)x}$.

(u) $P\dfrac{1}{(1+\ln^2 x)x}$.

(v) $Px\cos^2(x^2)\sin^3(x^2)$.

(w) $P\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x(1-e^{2\sqrt{x}})}}$. (*)

(x) $P\sin^4 x\cos^3 x$. (*)

21. Mostre que $x\arccos x-\sqrt{1-x^2}$ é uma primitiva de $\arccos x$.

22. Justifique que $f(x)=\begin{cases}2x+1, & x<0\\ \cos x, & x\geq 0,\end{cases}$ é primitivável em $\mathbb{R}$ e indique uma primitiva desta função.

23. Resolva o PVI, $F''(x)=\dfrac{1}{x^3}$, $F'(1)=1$ e $F'(1)=-3$.

24. Determine uma função derivável F tal que $F'(x)=x\,\mathrm{arctg}(x^2)$ e $F(0)=1$.

Nota: os exercícios assinalados com (*) são desafios :)

BOM ESTUDO!

	Função a primitivar	Primitiva
1)	$k,\ k\in\mathbb{R}$	kx
2)	$f^\alpha\cdot f',\ \alpha\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$	$\dfrac{f^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
	$x^\alpha,\ \alpha\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
3)	$\dfrac{f'}{f}$	$\ln\|f\|$
	$\dfrac{1}{x}$	$\ln\|x\|$
4)	$\sin f\cdot f'$	$-\cos f$
5)	$\cos f\cdot f'$	$\sin f$
6)	$\mathrm{tg}\, f\cdot f'$	$-\ln\|\cos f\|$
7)	$\mathrm{cotg}\, f\cdot f'$	$\ln\|\sin f\|$
8)	$\sec^2 f\cdot f'$	$\mathrm{tg}\, f$
9)	$\mathrm{cosec}^2 f\cdot f'$	$-\mathrm{cotg}\, f$
10)	$\sec f\cdot f'$	$\ln\|\sec f+\mathrm{tg}\, f\|$
11)	$\mathrm{cosec}\, f\cdot f'$	$\ln\|\mathrm{cosec}\, f-\mathrm{cotg}\, f\|$
12)	$\sec f\cdot \mathrm{tg}\, f\cdot f'$	$\sec f$
13)	$\mathrm{cosec}\, f\cdot \mathrm{cotg}\, f\cdot f'$	$-\mathrm{cosec}\, f$
14)	$a^f\cdot f',\ a\in\mathbb{R}^+\setminus\{1\}$	$\dfrac{a^f}{\ln a}$
15)	$e^f\cdot f'$	e^f
16)	$\dfrac{f'}{\sqrt{1-f^2}}$	$\arcsin f$
17)	$\dfrac{-f'}{\sqrt{1-f^2}}$	$\arccos f$
18)	$\dfrac{f'}{1+f^2}$	$\mathrm{arctg}\, f$

Tabela 2.1: Primitivas de algumas funções.