Soluções de algumas alíneas dos exercícios 23, 24 e 25

23. (pág. 69)

1. (a) $\mathcal{C}(A)^\perp = \{(x_1, x_2) : x_1 = 2\,x_2,\ x_2 \in \mathbb{R}\} = \langle (2,1) \rangle$ que define a reta de $\mathbb{R}^2$ que passa na origem, com vetor diretor $(2,1)$.

   (b) $\mathcal{C}(A)^\perp = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 = -2\,x_3,\ x_2 = -\frac{3}{2}\,x_3,\ x_3 \in \mathbb{R}\} = \langle (-4,-3,2) \rangle$ que define a reta de $\mathbb{R}^3$ que passa na origem, com vetor diretor $(-4,-3,2)$.

   (c) $\mathcal{C}(A)^\perp = (\mathbb{R}^3)^\perp = \{\vec{0}\}$.

   (d) $\mathcal{C}(A)^\perp = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 = -2\,x_2 - 3\,x_3 - 4\,x_4,\ x_2 \in \mathbb{R},\ x_3 \in \mathbb{R},\ x_4 \in \mathbb{R}\} = \langle (-2,1,0,0), (-3,0,1,0), (-4,0,0,1) \rangle$ que define o hiperplano de $\mathbb{R}^4$ que passa na origem e contém as direções $(-2,1,0,0)$, $(-3,0,1,0)$ e $(-4,0,0,1)$.

   (e) $\mathcal{C}(A)^\perp = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 = -3\,x_3 + 3\,x_4,\ x_2 = -2\,x_3 + 2\,x_4,\ x_3 \in \mathbb{R},\ x_4 \in \mathbb{R}\} = \langle (-3,-2,1,0), (3,2,0,1) \rangle$ que define o plano de $\mathbb{R}^4$ que passa na origem e contém as direções $(-3,-2,1,0)$ e $(3,2,0,1)$.

   (Obs: a interpretação geométrica não era pedida no exercício.)

2. $\mathcal{C}(A)^\perp = \langle (-4,-2,1) \rangle$.

3. $\langle (1,2,2,1), (1,0,2,0) \rangle^\perp = \langle (-2,0,1,0), (0,-1,0,2) \rangle$

   $\langle (1,1,2,-1) \rangle^\perp = \langle (-1,1,0,0), (-2,0,1,0), (1,0,0,1) \rangle$

4. (a) A dimensão é 1 e uma possível base é $\{(-1,1)\}$.

   (b) A dimensão é 1 e uma possível base é $\{(-1,1,0)\}$.

   (c) A dimensão é 2 e uma possível base é $\{(2,-2,1,0), (5,-5,0,2)\}$.

   (d) A dimensão é 1 e uma possível base é $\{(0,-1,2,4)\}$.

5. Uma possível base é $\{(1,1,3), (1,1,2), (-1,1,0)\}$.

6. (a) Sugestão: prove que $A^T A = I$ sse A é ortogonal.

   (b)

24. (pág. 74) $\quad \mathrm{proj}_V((4,-1,1)) = \left(\frac{8}{3}, \frac{1}{3}, \frac{7}{3}\right)$.

25. (pág. 78)

1. $\mathrm{proj}_{(3,1)}((2,3)) = \left(\frac{27}{10}, \frac{9}{10}\right)$.

2. $\mathrm{proj}_{\langle(1,-1.3)\rangle}((6,5,4)) = \left(\frac{13}{11}, -\frac{13}{11}, \frac{39}{11}\right)$.

3. O vetor a menor distância é o vetor $\left(\frac{7}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right)$.

4. (a) $\mathrm{proj}_{(1,0,1)}((1,1,1)) = (1,0,1)$.

   (b) $\mathrm{proj}_V(b) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$.

   $\mathrm{proj}_{V^\perp}(b) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$.

   $\mathrm{proj}_U(b) = (0,0,0)$.

   $\mathrm{proj}_{U^\perp}(b) = (1,1,1)$.

   (c) $d(b,V) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

   $d(b,U) = \sqrt{3}$.

5. $\mathrm{proj}_{\langle(1,1,0,2),(-1,0,0,1)\rangle}((0,2,5,-1)) = \left(\frac{7}{11}, \frac{1}{11}, 0, -\frac{4}{11}\right)$.

6. $\mathrm{proj}_U((2,1,0,1)) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

   $\mathrm{proj}_{U^\perp}((2,1,0,1)) = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

7. $\dfrac{1}{14}\begin{bmatrix} 13 & -2 & -3 \\ -2 & 10 & -6 \\ -3 & -6 & 5 \end{bmatrix}$.

8. (a) $\dfrac{1}{14}\begin{bmatrix} 6 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 12 & -2 & -2 \\ 4 & -2 & 5 & 5 \\ 4 & -2 & 5 & 5 \end{bmatrix}$.

   (b) $\mathrm{proj}_V(w) = (1,-2,2,2)$.

9.

10. (a) $\dfrac{\pi}{2}$.

    (b) $\text{proj}_{\langle u,v\rangle}(b) = \left(\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, 0, \frac{4}{3}\right)$.

11. (a)

    (b) $(0, 2, 4) = \dfrac{2}{3}\, a + \dfrac{5}{3}\, b + c$.

12. (a) Uma possível base ortogonal é $\{(1, 0, 1), (1, 0, -1), (0, 1, 0)\}$.

    (b) $\left\{ \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right), (0, 1, 0) \right\}$.

13. (a) Uma possível base ortogonal é $\{(-1, 1, 0, 0), (1, 1, 2, 0), (-1, -1, 1, 3)\}$.

    (b) $\text{proj}_V(b) = (1, 0, 1, 0)$.