Resolução do exercício

Temos uma v.a. X com função densidade

$$f(x|\theta) = (\theta+1)x^{\theta} \quad \text{se } 0<x<1$$

θ é um parâmetro desconhecido que pretendemos estimar

a) Pelo método dos momentos, e como temos só um parâmetro, um estimador de θ obtém-se como solução da equação $E[X] = \overline{X} \iff$

$$\frac{\theta+1}{\theta+2} = \overline{X} \iff \theta + 1 = (\theta+2)\overline{X}$$

$$\iff \theta - \theta\overline{X} = 2\overline{X} - 1 \iff \boxed{\theta^* = \frac{2\overline{X}-1}{1-\overline{X}}}$$

estimador obtido pelo método dos momentos.

b) O estimador de máxima verosimilhança é o valor que maximiza a função verosimilhança. Então vamos ver: se $f(x|\theta) = (\theta+1)x^{\theta}$

a verosimilhança é

$$L(\theta|x_1, \dots, x_n) = f(x_1|\theta) \cdot f(x_2|\theta) \cdots f(x_n|\theta)$$

$$= (\theta+1)x_1^{\theta} \, (\theta+1)x_2^{\theta} \cdots (\theta+1)x_n^{\theta}$$

$$L(\theta|\underline{x}) = (\theta+1)^n \left(\Pi x_i\right)^{\theta}$$

vamos logaritmizar (para tornar os cálculos + fáceis)

$$\log L(\theta|\underline{x}) = n\log(\theta+1) + \theta\log(\Pi x_i)$$

$$= n\log(\theta+1) + \theta\sum_{i=1}^{n}\log(x_i)$$

$$\frac{d\log L(\theta|\underline{x})}{d\theta} = \frac{n}{\theta+1} + \Sigma\log(x_i) = 0$$

$$\Rightarrow \theta + 1 = -\frac{n}{\Sigma\log(x_i)} \Rightarrow \boxed{\hat{\theta} = -1 - \frac{n}{\Sigma\log(X_i)}}$$

estimador de máxima verosimilhança.

c) Para calcular as estimativas é só calcular $\bar{x}$ e $\sum \log(x_i)$ para a amostra dada e substituir em

$$\theta^* = \frac{2\bar{x}-1}{1-\bar{x}} \quad \text{e} \quad \hat{\theta} = -1 - \frac{n}{\sum \log(x_i)}$$

e obtemos as estimativas por cada um dos métodos.

<u>comandos</u> p/ o R

```
xval <- c(0.34,0.52, ..., 0.87)
n <- 15
theta_est1 <- (2 * mean(xval) -1)/(1- mean(xval))
theta_est2 <- -1- n /(sum (log(xval)))
```