



Instituto Superior de Agronomia
Modelos Matemáticos e Aplicações – 2019/2020

Teste do Módulo I

Duração: 2 horas

30 de Junho de 2020

1. (8 val.) No programa de desenvolvimento de uma dada região com solos de natureza calcária, pretende fazer-se um estudo para o estabelecimento adequado de pastagens. Recolheram-se amostras de solo em vários locais e mediu-se o valor de várias características importantes no estudo da fertilidade do solo, produtividade e resistência à erosão. De entre elas vamos considerar apenas o cálcio de troca (Ca) (em $\text{cmol}(+)/\text{kg}$), registado em 60 parcelas, em 2 anos (que designamos por **ano1** e **ano2**). Os dados encontram-se no ficheiro **solo.xlsx** que se envia conjuntamente com este enunciado.

Crie um *script*, onde deve colocar os diferentes comandos a executar no  para responder, sempre que necessário, às seguintes questões. Comece por ler no  os dados registados.

- a) Classifique, justificando, a variável “cálcio de troca”.
 - b) Apresente uma análise descritiva das observações registadas.
 - c) Esboce os *boxplots* paralelos para os valores de Ca nos dois anos. Explique como foram obtidos (basta explicar um dos *boxplot*, indicando os cálculos necessários).
 - d) Construa um histograma para os valores observados de Ca, no **ano2**, considerando como limites das classes os seguintes valores 7, 10, 12, 14, 15, 18. Apresente a tabela de frequências associada.
 - e) Pretende-se estudar o comportamento do cálcio de troca nos dois anos.
 - i) Calcule um intervalo de confiança a 95% para o cálcio de troca no **ano1** e interprete-o.
 - ii) Poder-se-á dizer que, em média, se verificou um aumento do cálcio de troca do **ano1** para o **ano2**? Responda de forma completa à pergunta.
 - iii) Poder-se-á considerar que a percentagem de parcelas com cálcio de troca superior a 13 $\text{cmol}(+)/\text{kg}$, no **ano2**, é superior a 40%? Justifique adequadamente.
2. (4.5 val.) Uma forma de avaliar o efeito do DDT no ambiente consiste em estudar a espessura das cascas dos ovos de uma dada espécie de aves, que vive em zonas montanhosas. Suponha que o modelo adequado para caracterizar a espessura da casca dos ovos nas referidas zonas é um modelo normal com valor médio 140 mm e desvio padrão 4 mm.
- a) Determine um valor k tal que a probabilidade de a espessura da casca de um ovo escolhido ao acaso estar entre $140 - k$ e $140 + k$ seja 0.60.
 - b) São seleccionados 80 ovos ao acaso.
 - i) Calcule a probabilidade de mais de 4 ovos apresentarem uma espessura inferior a 132 mm, utilizando uma distribuição aproximada.
 - ii) Qual a probabilidade de a média das espessuras desses ovos ser inferior a 141 mm?

3. (3.5 val.) Realizou-se uma experiência em que se enxertaram genótipos de laranja doce em três tipos de árvores: limoeiro, tangerineira e laranjeira, a fim de estudar a incidência de cancro cítrico nas folhas de cada um daqueles tipos. Na época adequada seleccionaram-se folhas de cada uma daquelas árvores e classificou-se a incidência em três categorias: ‘não se revelou’, ‘revelou-se moderada’, ‘revelou-se grave’. Pretende-se verificar se a incidência de cancro cítrico difere significativamente consoante o tipo de árvore. Os valores observados encontram-se no quadro abaixo:

Árvore	‘não se revelou’	‘revelou-se moderada’	‘revelou-se grave’
Limoeiro	45	32	12
Tangerineira	26	47	28
Laranjeira	19	20	17

- a) Face ao modo descrito de realização da experiência como classifica esta tabela de contingência e que tipo de teste estatístico se deve realizar?
- b) Responda de forma completa à questão colocada
4. (4 val.) A distribuição beta tem sido utilizada para modelar a taxa de incidência de cancro cítrico nas folhas, que designamos por X . Vamos aqui considerar uma forma simples daquela distribuição, dependente apenas de um parâmetro, $\alpha > 0$, sendo a função densidade assim dada:

$$f(x|\alpha) = \alpha x^{\alpha-1}, \quad 0 < x < 1.$$

Considere $E[X] = \frac{\alpha}{\alpha+1}$.

Considerando uma amostra aleatória de dimensão n , (X_1, X_2, \dots, X_n) , retirada de X , com aquela função densidade

- a) Obtenha o estimador de α pelo método dos momentos.
- b) Determine o estimador de máxima verosimilhança para α .
- c) Observada a seguinte amostra de 10 valores de X

0.51 0.92 0.74 0.10 0.41 0.54 0.11 0.92 0.90 0.89

determine estimativas para α .