Matematica I - 2021/22

Aula prática 12 Nov - Parte 1

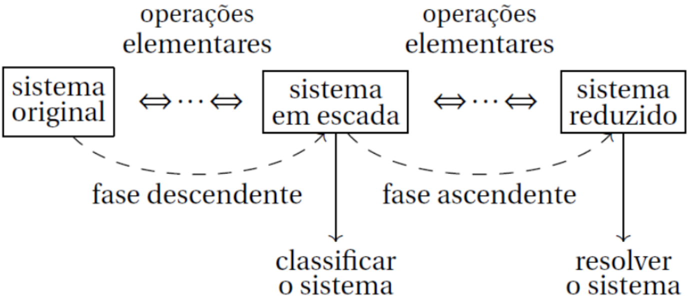
Isabel Martins

Sinopse

Sistemas de equações lineares

Fonte; Os Espacialistas

Método de eliminação de Gauss



Operações elementares

Adicionar a uma equação um múltiplo de outra.

Multiplicar uma equação por um escalar não nulo.

Permutar duas equações.

Exemplo 1 Fase descendente

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y = 0 \\ 2x - y = 4 \end{cases} \underbrace{\overset{\substack{Eq2-2Eq1->Eq2 \\ Eq3-2Eq1->Eq3}}{}}_{\Leftrightarrow}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ -3y - 2z = -12 \\ -3y - 2z = -8 \end{cases} \underbrace{\overset{Eq3-Eq2->Eq3}{}}_{\Leftrightarrow}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ -3y - 2z = -12 \\ 0 = 4 \end{cases}$$

$\underbrace{\text{\textbf{Sistema em escada}}}_{\downarrow}$ $\rightarrow \exists$ uma condição impossível $\rightarrow$ Sistema impossível

O 1^{o} coeficiente $\neq 0$ de cada equação está mais à direita do que o da equação anterior

Exemplo 2 Fase descendente

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y = 0 \\ 2x + y + z = 2 \end{cases} \underbrace{\Leftrightarrow}_{\substack{Eq2-2Eq1->Eq2 \\ Eq3-2Eq1->Eq3}}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ -3y - 2z = -12 \\ -y - z = -10 \end{cases} \underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{troca entre Eq2 e Eq3}}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ -y - z = -10 \\ -3y - 2z = -12 \end{cases} \underbrace{\Leftrightarrow}_{Eq3-3Eq2->Eq3}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ -y - z = -10 \\ z = 18 \end{cases}$$

Pivot - 1º coeficiente $\neq 0$ de uma equação num sistema em escada
Variáveis pivot - x, y, z

Exemplo 2 Fase ascendente

$$\left\{\begin{array}{rcrcrl} x & + & y & + & z & = 6 \\ & & -y & - & z & = -10 \\ & & & & z & = 18 \end{array}\right. \underbrace{\Leftrightarrow}_{\substack{Eq2+Eq3->Eq2 \\ Eq1-Eq3->Eq1}}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} x & + & y & & = -12 \\ & & -y & & = 8 \\ & & & z & = 18 \end{array}\right. \underbrace{\Leftrightarrow}_{Eq1+Eq2->Eq1}$$

$$\left\{\begin{array}{rrrl} x & & & = -4 \\ & -y & & = 8 \\ & & z & = 18 \end{array}\right. \underbrace{\Leftrightarrow}_{-Eq2->Eq2}$$

$$\left\{\begin{array}{rrrl} x & & & = -4 \\ & y & & = -8 \\ & & z & = 18 \end{array}\right. \qquad C.S. = \{(-4, -8, 18)\}$$

Sistema reduzido - sistema em escada com todos os pivots = 1 e no máximo uma variável pivot por equação

Exemplo 3 Fase descendente

$$\left\{\begin{array}{rcrcrl} x & + & y & + & z & = 6 \\ 2x & - & y & & & = 0 \\ 4x & - & 2y & & & = 0 \end{array}\right. \underbrace{\Leftrightarrow}_{\substack{Eq2-2Eq1->Eq2 \\ Eq3-4Eq1->Eq3}}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrl} x & + & y & + & z & = 6 \\ & & -3y & - & 2z & = -12 \\ & & -6y & - & 4z & = -24 \end{array}\right. \underbrace{\Leftrightarrow}_{Eq3-2Eq2->Eq3}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrl} x & + & y & + & z & = 6 \\ & & -3y & - & 2z & = -12 \\ & & & & 0 & = 0 \end{array}\right.$$

Variáveis pivot - x, y
Variável livre - z

Exemplo 3 Fase ascendente

$$\left\{\begin{array}{rcrcrl} x & + & y & + & z & = 6 \\ & & -3y & - & 2z & = -12 \\ & & & & 0 & = 0 \end{array}\right. \quad \underset{\Leftrightarrow}{\overbrace{-\tfrac{1}{3}Eq2->Eq2}}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrl} x & + & y & + & z & = 6 \\ & & y & + & \frac{2}{3}z & = 4 \\ & & & & 0 & = 0 \end{array}\right. \quad \underset{\Leftrightarrow}{\overbrace{Eq1-Eq2->Eq1}}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrl} x & & & + & \frac{1}{3}z & = 2 \\ & & y & + & \frac{2}{3}z & = 4 \\ & & & & 0 & = 0 \end{array}\right.$$

$$C.S. = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \left\{\begin{array}{c} x = 2 - \frac{1}{3}z \\ y = 4 - \frac{2}{3}z \\ z = \forall \end{array}\right. \}$$

Classificação dos sistemas lineares

Sistema impossível - $\exists$ condição impossível no sistema em escada

Sistema indeterminado - sistema possível <u>com</u> variáveis livres (no formato de escada)

Sistema determinado - sistema possível <u>sem</u> variáveis livres (no formato de escada)

Exemplo 3 Matriz ampliada do sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y = 0 \\ 4x - 2y = 0 \end{cases}$$

Matriz ampliada do sistema

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Operações elementares

Adicionar à linha i a linha j multiplicada por λ	$L_i + \lambda L_j \to L_i$
Multiplicar a linha i por $\lambda \neq 0$	$\lambda L_i \to L_i$
Permutar a linha i com a linha j	$L_i \longleftrightarrow L_j$

Fase descendente

Algoritmo 1. MÉTODO DE ELIMINAÇÃO DE GAUSS

`Input:` *Matriz ampliada* $[A|b]$ *de um sistema linear*

`Objectivo:` *Redução do sistema*

<u>Fase descendente</u>

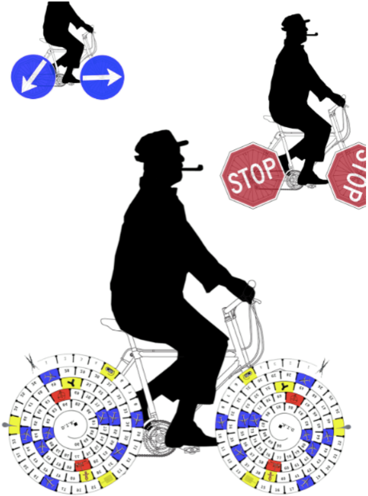
1) *Se necessário, efectuar trocas de linhas em* $[A|b]$ *de modo a que o pivot da primeira linha se encontre na coluna não nula mais à esquerda da matriz dos coeficientes.*

2) *Utilizar o pivot da primeira linha para eliminar os restantes elementos da coluna desse pivot.*

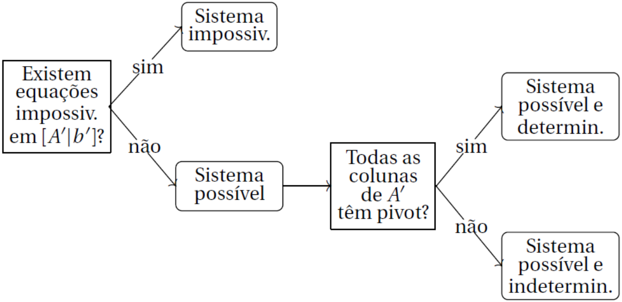
3) *Repetir os procedimentos anteriores relativamente à submatriz que se obtém ignorando a primeira linha e assim sucessivamente enquanto existirem linhas não nulas na matriz dos coeficientes dessa submatriz.*

No final da fase descendente obtém-se a matriz $[A'|b']$ com A' em escada .

STOP



Classificação do sistema linear



Fase ascendente

Fase ascendente (apenas se aplica aos sistemas possíveis)

4) *Usando o pivot que se encontra mais à direita na matriz A' eliminar os restantes elementos da coluna desse pivot e fazer o pivot igual 1.*

5) *Repetir os procedimentos do passo anterior relativamente à coluna com pivot imediatamente anterior e assim sucessivamente enquanto existirem colunas com pivot (percorrendo a matriz da direita para a esquerda).*

No final da fase ascendente obtém-se a matriz $[A''|b'']$ com A'' reduzida.

Para terminar

Seja S um sistema de equações lineares do tipo $m \times n$. Diga, justificando, se cada uma das seguintes afirmações é verdadeira ou falsa.

a) Se $m < n$, então S é indeterminado.

b) Se S é possível e $m < n$, então é indeterminado com exatamente $m - n$ variáveis livres.

c) Se $m > n$, então S é impossível.

d) Se S é possível e $m > n$, então S é determinado.

e) Se S é possível e $m = n$, então S é determinado.