Matemática I

8 Nov 2021

Isabel Martins

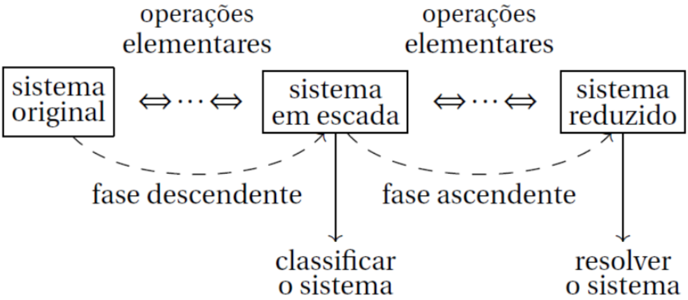
Sinopse

Método de eliminação de Gauss

Sistemas de equações lineares

Fonte; Os Espacialistas

Método de eliminação de Gauss



Operações elementares

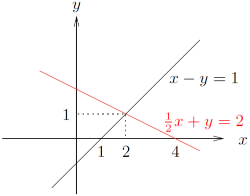
Adicionar a uma equação um múltiplo de outra.

Multiplicar uma equação por um escalar não nulo.

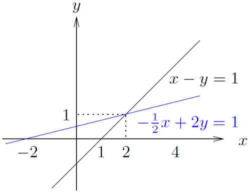
Permutar duas equações.

Sobre "Adicionar a uma equação um múltiplo de outra"

$$\begin{cases} x - y & = & 1 \\ \frac{1}{2}x + y & = & 2 \end{cases}$$



$$\begin{cases} x - \quad y & = & 1 \\ -\frac{1}{2}x + 2y & = & 1 \end{cases}$$



- Repare que se fez Eq2 + (- 1)$\times$Eq1 para se obter o 2º sistema
- a Eq2 mudou
- mas o resultado da intersecção manteve-se (os dois sistemas são equivalentes).

Exemplo 1 Fase descendente

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 6 \\ 2x & - & y & & & = & 0 \\ 2x & - & y & & & = & 4 \end{array}\right. \underbrace{\Leftrightarrow}_{\substack{Eq2-2Eq1->Eq2 \\ Eq3-2Eq1->Eq3}}$$

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 6 \\ & & -3y & - & 2z & = & -12 \\ & & -3y & - & 2z & = & -8 \end{array}\right. \underbrace{\Leftrightarrow}_{Eq3-Eq2->Eq3}$$

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 6 \\ & & -3y & - & 2z & = & -12 \\ & & & & 0 & = & 4 \end{array}\right.$$

$\underbrace{\textbf{Sistema em escada}}$ $\rightarrow \exists$ uma condição impossível $\rightarrow$ Sistema impossível

$\downarrow$

O 1º coeficiente $\neq 0$ de cada equação está mais à direita do que o da equação anterior

Exemplo 2 Fase descendente

$$\left\{\begin{array}{rcrcrl} x & + & y & + & z & = 6 \\ 2x & - & y & & & = 0 \\ 2x & + & y & + & z & = 2 \end{array}\right. \underbrace{\Leftrightarrow}^{\substack{Eq2-2Eq1->Eq2 \\ Eq3-2Eq1->Eq3}}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrl} x & + & y & + & z & = 6 \\ & & -3y & - & 2z & = -12 \\ & & -y & - & z & = -10 \end{array}\right. \underbrace{\Leftrightarrow}^{\text{troca entre Eq2 e Eq3}}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrl} x & + & y & + & z & = 6 \\ & & -y & - & z & = -10 \\ & & -3y & - & 2z & = -12 \end{array}\right. \underbrace{\Leftrightarrow}^{Eq3-3Eq2->Eq3}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrl} x & + & y & + & z & = 6 \\ & & -y & - & z & = -10 \\ & & & & z & = 18 \end{array}\right.$$

Pivot - 1º coeficiente $\neq 0$ de uma equação num sistema em escada
Variáveis pivot - x, y, z

Exemplo 2 Fase ascendente

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ -y - z = -10 \\ z = 18 \end{cases} \underbrace{\Leftrightarrow}_{\substack{Eq2+Eq3->Eq2 \\ Eq1-Eq3->Eq1}}$$

$$\begin{cases} x + y = -12 \\ -y = 8 \\ z = 18 \end{cases} \underbrace{\Leftrightarrow}_{Eq1+Eq2->Eq1}$$

$$\begin{cases} x = -4 \\ -y = 8 \\ z = 18 \end{cases} \underbrace{\Leftrightarrow}_{-Eq2->Eq2}$$

$$\begin{cases} x = -4 \\ y = -8 \\ z = 18 \end{cases} \qquad C.S. = \{(-4, -8, 18)\}$$

Sistema reduzido - sistema em escada com todos os pivots = 1 e no máximo uma variável pivot por equação

Exemplo 3 Fase descendente

$$\left\{\begin{array}{rcrcrl} x & + & y & + & z & = 6 \\ 2x & - & y & & & = 0 \\ 4x & - & 2y & & & = 0 \end{array}\right. \underbrace{\Leftrightarrow}^{\substack{Eq2-2Eq1->Eq2 \\ Eq3-4Eq1->Eq3}}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrl} x & + & y & + & z & = 6 \\ & & -3y & - & 2z & = -12 \\ & & -6y & - & 4z & = -24 \end{array}\right. \underbrace{\Leftrightarrow}^{Eq3-2Eq2->Eq3}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrl} x & + & y & + & z & = 6 \\ & & -3y & - & 2z & = -12 \\ & & & & 0 & = 0 \end{array}\right.$$

Variáveis pivot - x, y
Variável livre - z

Exemplo 3 Fase ascendente

$$\left\{\begin{array}{rcrcrl} x & + & y & + & z & = 6 \\ & & -3y & - & 2z & = -12 \\ & & & & 0 & = 0 \end{array}\right. \quad \underbrace{\Leftrightarrow}_{-\frac{1}{3}Eq2->Eq2}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrl} x & + & y & + & z & = 6 \\ & & y & + & \frac{2}{3}z & = 4 \\ & & & & 0 & = 0 \end{array}\right. \quad \underbrace{\Leftrightarrow}_{Eq1-Eq2->Eq1}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrl} x & & & + & \frac{1}{3}z & = 2 \\ & & y & + & \frac{2}{3}z & = 4 \\ & & & & 0 & = 0 \end{array}\right.$$

$$C.S. = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \left\{\begin{array}{c} x = 2 - \frac{1}{3}z \\ y = 4 - \frac{2}{3}z \\ z = \forall \end{array}\right. \}$$

Classificação dos sistemas lineares

Sistema impossível - $\exists$ condição impossível no sistema em escada

Sistema indeterminado - sistema possível _com_ variáveis livres (no formato de escada)

Sistema determinado - sistema possível _sem_ variáveis livres (no formato de escada)

Exercícios :)

1, Determine a intersecção da recta r com o plano π
   1. $r : (x, y, z) = (-1, -1, 0) + k(1, -1, -1)$, com $k \in \mathbb{R}$, e $\pi : x + y + z + 1 = 0$
   2. $r : x - 3 = y - 2 = \dfrac{z+1}{2}$ e $\pi : x + 2y - z = 10$.
2. O plano π_1 contém os pontos $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$ e $C = (0, 0, 1)$, o plano π_2 contém o ponto $Q = (-1, -1, 0)$ e é paralelo a $\vec{u} = (0, 1, -1)$ e $\vec{v} = (1, 0, 1)$ e o plano π_3 tem equação $(x, y, z) = (1, 1, 1) + k(-2, 1, 0) + l(1, 0, 1)$, com $k, l \in \mathbb{R}$.
   1. Obtenha as equações gerais dos três planos
   2. Determine a intersecção dos três planos.
3. Obtenha os pontos do plano $\pi_1 : (x, y, z) = (1, 0, 0) + k(2, 1, 1) + l(0, 0, 1)$, com $k, l \in \mathbb{R}$, que pertencem ao plano $\pi_2 : x + y + z - 1 = 0$.

TPC + Bons estudos!

+ Exercícios 72 (a) e (b)