Matemátical - 2021/22

Aula 29 Nov

Isabel Martins

Sinopse

1 Operações algébricas com matrizes (continuação)

2 Transformações geométricas no plano

3 Transformações geométricas no espaço

Operações algébricas com matrizes

Multiplicação de matrizes

Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$Ax = b \quad \Leftrightarrow$$

Operações algébricas com matrizes

Multiplicação de matrizes

Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} Ax = b \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \end{aligned}$$

Operações algébricas com matrizes

Multiplicação de matrizes

Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} Ax = b \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 \\ -x_1 + 0x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \end{aligned}$$

Operações algébricas com matrizes

Multiplicação de matrizes

Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} Ax = b \quad & \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ & \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 \\ -x_1 + 0x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ & \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcrcr} x_1 & + & 2\,x_2 & = & -1 \\ -x_1 & & & = & 1 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Operações algébricas com matrizes

Multiplicação de matrizes

Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} Ax = b \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 \\ -x_1 + 0x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcrcr} x_1 & + & 2\,x_2 & = & -1 \\ -x_1 & & & = & 1 \end{array} \right. \end{aligned}$$

$x = (x_1, x_2)$ é solução da $\underline{\text{equação matricial}}$ $Ax = b \Leftrightarrow$

Operações algébricas com matrizes

Multiplicação de matrizes

Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} Ax = b \quad & \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ & \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 \\ -x_1 + 0x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ & \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcrcr} x_1 & + & 2\,x_2 & = & -1 \\ -x_1 & & & = & 1 \end{array} \right. \end{aligned}$$

$x = (x_1, x_2)$ é solução da $\underline{\text{equação matricial}}$ $Ax = b \Leftrightarrow$

$x = (x_1, x_2)$ é solução do sistema linear $\left\{ \begin{array}{rcrcr} x_1 & + & 2\,x_2 & = & -1 \\ -x_1 & & & = & 1 \end{array} \right.$

Operações algébricas com matrizes

Solução, o que é?

$x = (-1, 0)$ é solução da equação matricial

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ porque}$$

Operações algébricas com matrizes

Solução, o que é?

$x = (-1, 0)$ é solução da equação matricial

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ porque}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ é igual a } \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Operações algébricas com matrizes

Solução, o que é?

$x = (-1, 0)$ é solução da equação matricial

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ porque}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ é igual a } \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$x = (-1, 0)$ é solução do sistema linear $\left\{ \begin{array}{rcrcr} x_1 & + & 2\,x_2 & = & -1 \\ -x_1 & & & = & 1 \end{array} \right.$

porque

Operações algébricas com matrizes

Solução, o que é?

$x = (-1, 0)$ é solução da <u>equação matricial</u>

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ porque}$$

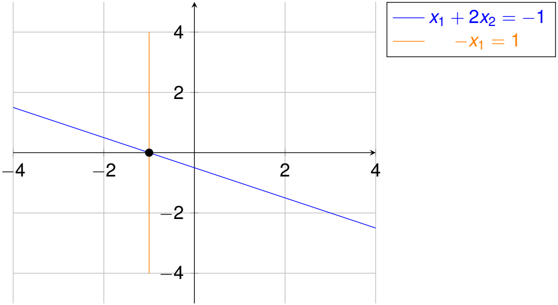
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ é igual a } \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$x = (-1, 0)$ é solução do sistema linear $\left\{ \begin{array}{rcrcr} x_1 & + & 2\,x_2 & = & -1 \\ -x_1 & & & = & 1 \end{array} \right.$

$$\text{porque} \left\{ \begin{array}{rcrcr} -1 & + & 2(0) & = & -1 \\ -(-1) & & & = & 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcr} -1 & = & -1 \\ 1 & = & 1 \end{array} \right.$$

Operações algébricas com matrizes

Interpretação geométrica da equação matricial/sistema linear



Operações algébricas com matrizes

Multiplicação de matrizes

Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$Ax = b \quad \Leftrightarrow$$

Operações algébricas com matrizes

Multiplicação de matrizes

Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$Ax = b \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow$$

Operações algébricas com matrizes

Multiplicação de matrizes

Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} Ax = b \quad & \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ & \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ & \\ & \Leftrightarrow \end{aligned}$$

Operações algébricas com matrizes

Multiplicação de matrizes

Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$
\begin{aligned}
Ax = b \quad & \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
& \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \end{array} \right.
\end{aligned}
$$

Operações algébricas com matrizes

Multiplicação de matrizes

Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$
\begin{aligned}
Ax = b \quad & \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
& \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \end{array} \right.
\end{aligned}
$$

$x = (x_1, x_2, x_3)$ é solução da equação matricial $Ax = b \Leftrightarrow$

Operações algébricas com matrizes

Multiplicação de matrizes

Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$
\begin{aligned}
Ax = b \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \end{array} \right.
\end{aligned}
$$

$x = (x_1, x_2, x_3)$ é solução da equação matricial $Ax = b \Leftrightarrow$

$x = (x_1, x_2, x_3)$ é solução do sistema linear acima

Operações algébricas com matrizes

Solução, o que é?

$x = (2, -1, 0)$ é solução da <u>equação matricial</u>

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$ porque

Operações algébricas com matrizes

Solução, o que é?

$x = (2, -1, 0)$ é solução da <u>equação matricial</u>

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ porque}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ é igual a } \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Operações algébricas com matrizes

Solução, o que é?

$x = (2, -1, 0)$ é solução da equação matricial

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ porque}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ é igual a } \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$x = (2, -1, 0)$ é solução do sistema linear

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \end{array} \right.$$

porque

Operações algébricas com matrizes

Solução, o que é?

$x = (2, -1, 0)$ é solução da equação matricial

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ porque}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ é igual a } \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$x = (2, -1, 0)$ é solução do sistema linear

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \end{array} \right.$$

$$\text{porque} \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2 & + & 2(-1) & + & 3(0) & = & 0 \\ 2(2) & + & 3(-1) & + & 5(0) & = & 1 \\ 2 & + & (-1) & + & 2(0) & = & 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 0 & = & 0 \\ 1 & = & 1 \\ 1 & = & 1 \end{array} \right.$$

Operações algébricas com matrizes

Solução, o que é?

Os vectores da forma $x = (2 - x_3, -1 - x_3, x_3)$, com $x_3 \in \mathbb{R}$, são solução da equação matricial

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$ porque

Operações algébricas com matrizes

Solução, o que é?

Os vectores da forma $x = (2 - x_3, -1 - x_3, x_3)$, com $x_3 \in \mathbb{R}$, são solução da equação matricial

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ porque}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 - x_3 \\ -1 - x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} \text{ é igual a } \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Operações algébricas com matrizes

Solução, o que é?

Os vectores da forma $x = (2 - x_3, -1 - x_3, x_3)$ são solução do sistema linear $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \end{array}\right.$ porque

Operações algébricas com matrizes

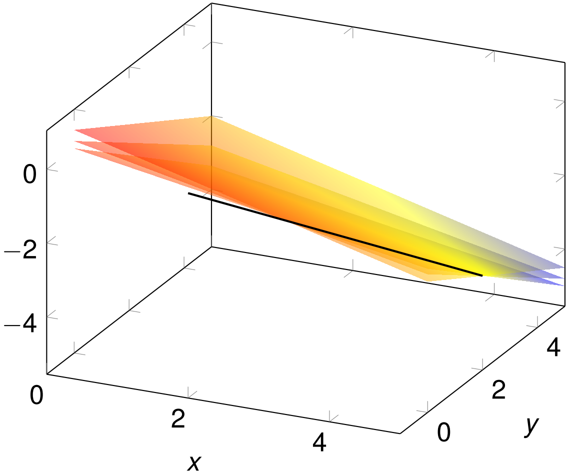
Solução, o que é?

Os vectores da forma $x = (2 - x_3, -1 - x_3, x_3)$ são solução do sistema linear $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \end{array}\right.$ porque

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2 - x_3 & + & 2(-1 - x_3) & + & 3(x_3) & = & 0 \\ 2(2 - x_3) & + & 3(-1 - x_3) & + & 5(x_3) & = & 1 \\ (2 - x_3) & + & (-1 - x_3) & + & 2(x_3) & = & 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 0 & = & 0 \\ 1 & = & 1 \\ 1 & = & 1 \end{array}\right.$$

Operações algébricas com matrizes

Interpretação geométrica da equação matricial/sistema linear



Operações algébricas com matrizes

Genericamente

$$Ax = b \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \; x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ e } b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ é solução da equação matricial $Ax = b \Leftrightarrow$

$x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ é solução do sistema linear acima

Transformações geométricas no plano

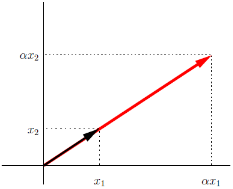
- **Homotetias**

$A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}$ define uma *homotetia* de razão $\alpha > 0$

$$\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \end{bmatrix}$$

Se $\alpha > 1$ a homotetia é uma *dilatação*

Se $\alpha < 1$ a homotetia é uma *contracção*

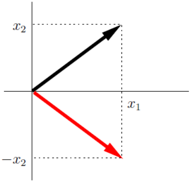


Transformações geométricas no plano

- **Simetrias**

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ define uma *simetria* relativamente ao eixo dos xx

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{bmatrix}$$



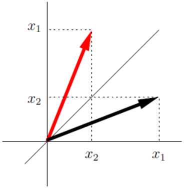
simetria relativamente
ao eixo dos xx

Transformações geométricas no plano

- **Simetrias**

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ define uma *simetria* relativamente à bissectriz dos quadrantes ímpares

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}$$



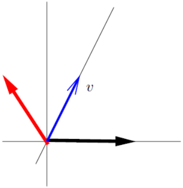
simetria relativamente à bissectriz dos quadrantes ímpares

Transformações geométricas no plano

- **Simetrias**

Em geral, a matriz A define uma *simetria* relativamente à recta que passa na origem e contém o vector $\vec{v} = (v_1, v_2) \neq \vec{0}$

$$A = \frac{1}{v_1^2 + v_2^2} \begin{bmatrix} v_1^2 - v_2^2 & 2v_1 v_2 \\ 2v_1 v_2 & v_2^2 - v_1^2 \end{bmatrix}$$



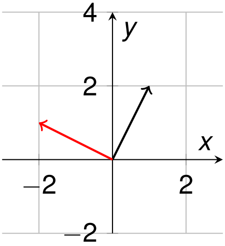
simetria relativamente a
uma reta com vetor diretor v

Transformações geométricas no plano

- **Rotações**

$A = \left[\begin{array}{cc} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{array}\right]$ define uma rotação de $\frac{\pi}{2}$ radianos no sentido anti-horário

$$\left[\begin{array}{cc} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} -x_2 \\ x_1 \end{array}\right]$$



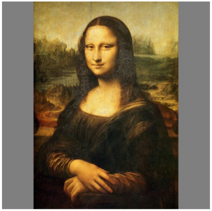
Transformações geométricas no plano

- **Rotações**

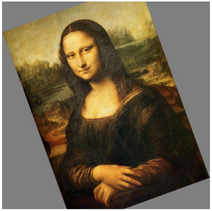
Em geral, $R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ define uma *rotação* de ângulo θ radianos no sentido anti-horário

Transformações geométricas no plano
Mona Lisa, L. da Vinci

$$\begin{bmatrix} \cos 1^{o} & -\sin 1^{o} \\ \sin 1^{o} & \cos 1^{o} \end{bmatrix}$$



largura: 400 pixel
altura: 572 pixel



20 aplicações

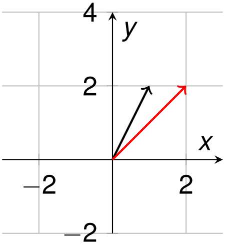
100 aplicações

Transformações geométricas no plano

- **Outras transformações**

$A = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ define uma transformação de cisalhamento horizontal

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + 0.5x_2 \\ x_2 \end{bmatrix}$$



Outras transformações

Auto-retrato, V. Gogh

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.01 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

largura: 563 pixel
altura: 705 pixel

20 aplicações

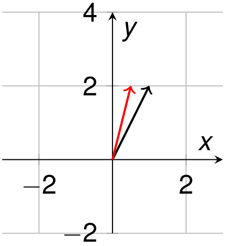
100 aplicações

Transformações geométricas no plano

- **Outras transformações**

$A = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ define uma transformação de cisalhamento horizontal

$$\begin{bmatrix} 1 & -0.5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - 0.5x_2 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

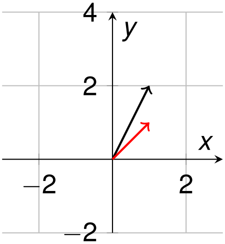


Transformações geométricas no plano

- **Outras transformações**

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0.5x_2 \end{bmatrix}$$



Transformações geométricas no plano

A persistência da memória, S. Dali

$$\begin{bmatrix} \frac{79}{80} & 0 \\ 0 & \frac{39}{40} \end{bmatrix}$$

largura: 580 pixel
altura: 418 pixel

10 aplicações

50 aplicações

Transformações geométricas no plano

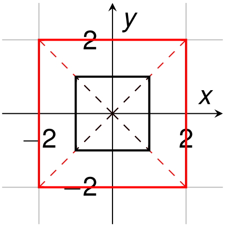
- **Mais exemplos**

  A matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

  transforma o quadrado preto no quadrado vermelho

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$



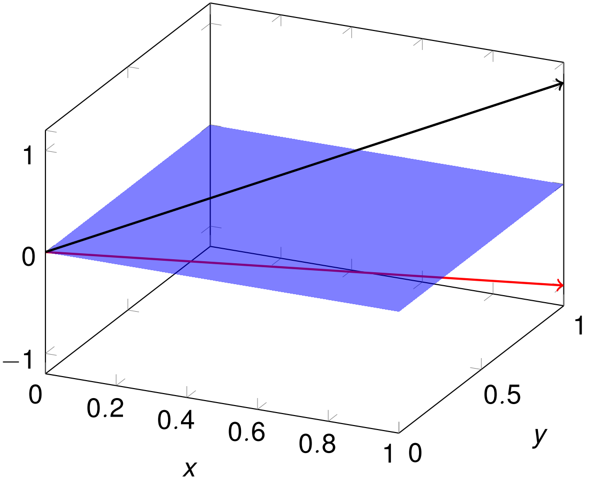
Transformações geométricas no espaço

- **Simetrias**

A matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ define uma *simetria* relativamente ao plano xOy

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_3 \end{bmatrix}$$

Transformações geométricas no espaço



TPC + Bons estudos!

Exercício 66

Crie outra transformação geométrica do triângulo definido no Exercício 66.