

Programação linear - Resolução gráfica

Isabel Martins

ISA - Matemática I - 2021/2022

Manter o rio limpo

O problema

Uma fábrica de celulose produz pastas de papel mecânica e química e, durante o processo de produção, polui o rio onde derrama as suas águas residuais. Os donos gostariam de minimizar a poluição, mantendo pelo menos 300 pessoas empregadas na fábrica e gerando pelo menos 40000 € de receitas por dia.



O problema

- A capacidade da fábrica é de 300 toneladas por dia para fazer pasta mecânica e 200 toneladas por dia para fazer pasta química (a linha da pasta mecânica não pode ser usada para fazer pasta química e vice-versa)

O problema

- A capacidade da fábrica é de 300 toneladas por dia para fazer pasta mecânica e 200 toneladas por dia para fazer pasta química (a linha da pasta mecânica não pode ser usada para fazer pasta química e vice-versa)
- Tanto a pasta mecânica como a pasta química requerem o trabalho de 1 trabalhador por cerca de 1 dia, ou 1 dia de trabalho (dt), por tonelada produzida

O problema

- A capacidade da fábrica é de 300 toneladas por dia para fazer pasta mecânica e 200 toneladas por dia para fazer pasta química (a linha da pasta mecânica não pode ser usada para fazer pasta química e vice-versa)
- Tanto a pasta mecânica como a pasta química requerem o trabalho de 1 trabalhador por cerca de 1 dia, ou 1 dia de trabalho (dt), por tonelada produzida
- A poluição é medida pela carência bioquímica de oxigênio (CBO). 1 tonelada de pasta mecânica produz 1 unidade de CBO, 1 tonelada de pasta química produz 1.5 unidades

O problema

- A capacidade da fábrica é de 300 toneladas por dia para fazer pasta mecânica e 200 toneladas por dia para fazer pasta química (a linha da pasta mecânica não pode ser usada para fazer pasta química e vice-versa)
- Tanto a pasta mecânica como a pasta química requerem o trabalho de 1 trabalhador por cerca de 1 dia, ou 1 dia de trabalho (dt), por tonelada produzida
- A poluição é medida pela carência bioquímica de oxigênio (CBO). 1 tonelada de pasta mecânica produz 1 unidade de CBO, 1 tonelada de pasta química produz 1.5 unidades
- A pasta química é vendida a 200 €/t, a pasta mecânica a 100 €/t.

Variáveis de decisão e formulação

x_1 - Quantidade de pasta mecânica produzida (t/dia)

x_2 - Quantidade de pasta química produzida (t/dia)

Variáveis de decisão e formulação

x_1 - Quantidade de pasta mecânica produzida (t/dia)

x_2 - Quantidade de pasta química produzida (t/dia)

$$\min Z = x_1 + 1.5x_2 \quad \text{unidades de CBO por dia} \quad (1)$$

sujeito a

$$x_1 + x_2 \geq 300 \quad \text{trabalhadores empregues} \quad (2)$$

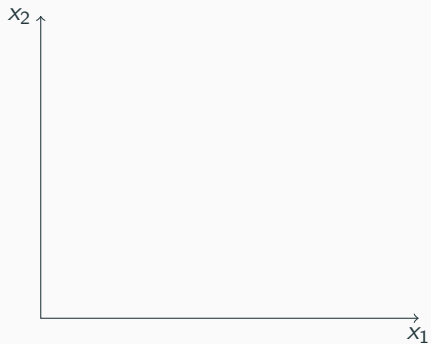
$$100x_1 + 200x_2 \geq 40000 \quad \text{receita, euros/dia} \quad (3)$$

$$x_1 \leq 300 \quad \text{capacidade da pasta mecânica, t/dia} \quad (4)$$

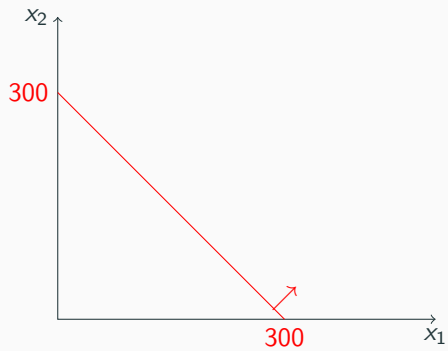
$$x_2 \leq 200 \quad \text{capacidade da pasta química, t/dia} \quad (5)$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \quad (6)$$

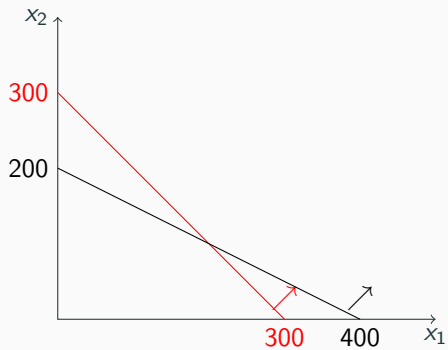
Região admissível



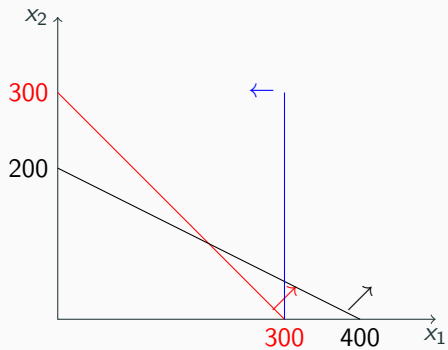
Região admissível



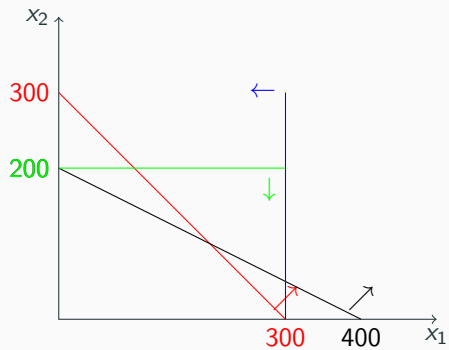
Região admissível



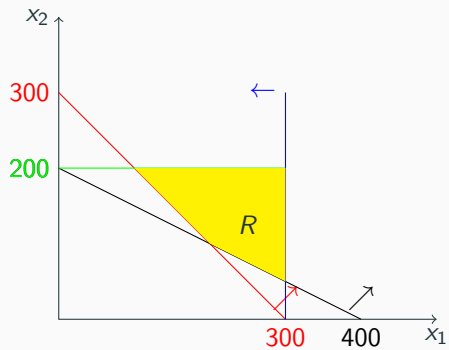
Região admissível



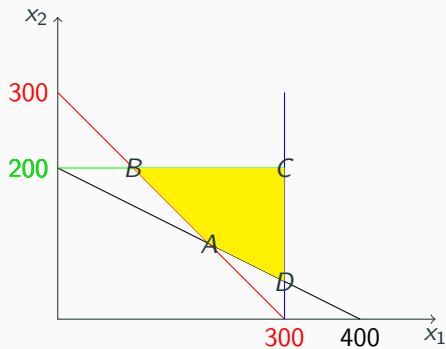
Região admissível



Região admissível

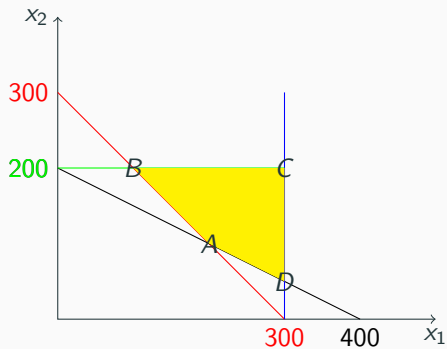


Região admissível e vértices



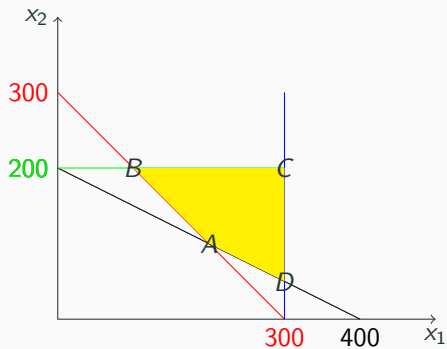
$$A = \begin{cases} x_1 + x_2 = 300 \\ 100x_1 + 200x_2 = 40000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 200 \\ x_2 = 100 \end{cases}$$

Região admissível e vértices



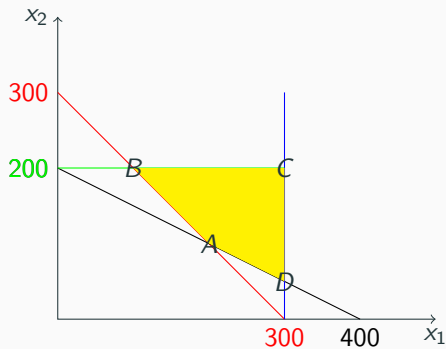
$$B = \begin{cases} x_1 + x_2 = 300 \\ x_2 = 200 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 100 \\ x_2 = 200 \end{cases}$$

Região admissível e vértices



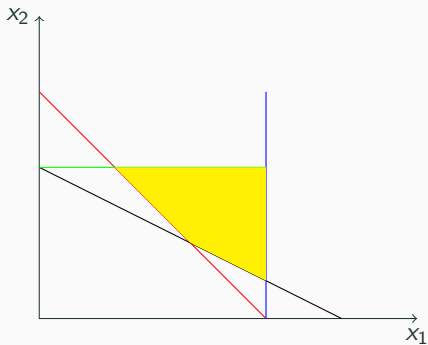
$$C = \begin{cases} x_2 = 200 \\ x_1 = 300 \end{cases}$$

Região admissível e vértices



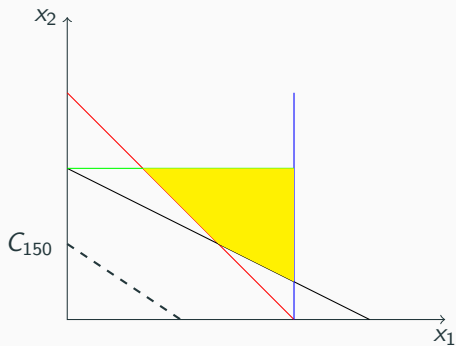
$$D = \begin{cases} x_1 & = 300 \\ 100x_1 + 200x_2 & = 40000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 & = 300 \\ x_2 & = 50 \end{cases}$$

Região admissível e curvas de nível



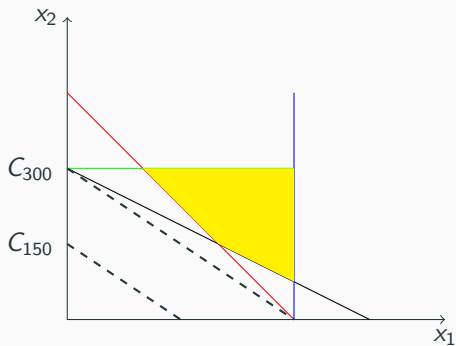
Curva de nível k , $C_k = \{(x_1, x_2) : Z = k\} = \{(x_1, x_2) : x_1 + 1.5x_2 = k\}$

Região admissível e curvas de nível



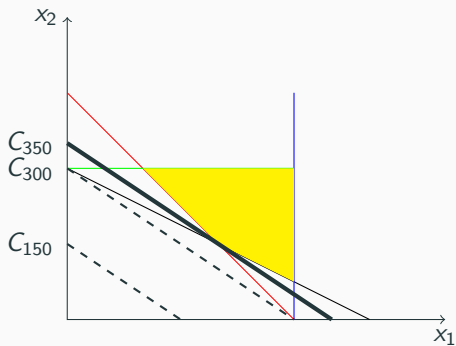
Curva de nível k , $C_k = \{(x_1, x_2) : Z = k\} = \{(x_1, x_2) : x_1 + 1.5x_2 = k\}$

Região admissível e curvas de nível



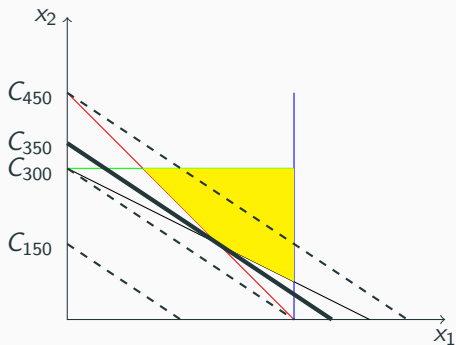
Curva de nível k , $C_k = \{(x_1, x_2) : Z = k\} = \{(x_1, x_2) : x_1 + 1.5x_2 = k\}$

Região admissível e curvas de nível



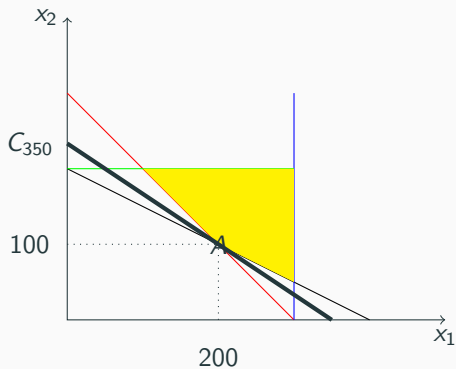
Curva de nível k , $C_k = \{(x_1, x_2) : Z = k\} = \{(x_1, x_2) : x_1 + 1.5x_2 = k\}$

Região admissível e curvas de nível



Curva de nível k , $C_k = \{(x_1, x_2) : Z = k\} = \{(x_1, x_2) : x_1 + 1.5x_2 = k\}$

Solução ótima



Optimal solution $A = (200, 100) \rightarrow Z^* = 350$ CBO

Região admissível limitada e uma solução óptima

Região admissível limitada e uma solução ótima

$$\min Z = x_1 + 1.5x_2 \quad (7)$$

subject to

$$x_1 + x_2 \geq 300 \quad (8)$$

$$100x_1 + 200x_2 \geq 40000 \quad (9)$$

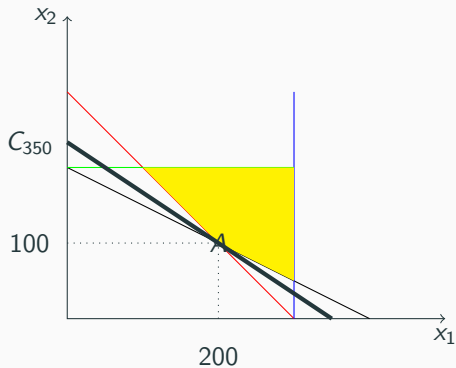
$$x_1 \leq 300 \quad (10)$$

$$x_2 \leq 200 \quad (11)$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \quad (12)$$

Região admissível limitada e uma solução óptima

$$\min Z = x_1 + 1.5x_2$$



Região admissível limitada e soluções óptimas alternativas

$$\min Z = x_1 + 2x_2 \quad (13)$$

subject to

$$x_1 + x_2 \geq 300 \quad (14)$$

$$100x_1 + 200x_2 \geq 40000 \quad (15)$$

$$x_1 \leq 300 \quad (16)$$

$$x_2 \leq 200 \quad (17)$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \quad (18)$$

Região admissível limitada e soluções óptimas alternativas

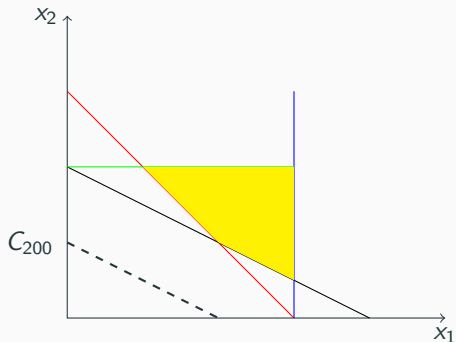
$$\min Z = x_1 + 2x_2$$



Soluções óptimas $[A, D] \rightarrow Z^* = 400$ CBO

Região admissível limitada e soluções óptimas alternativas

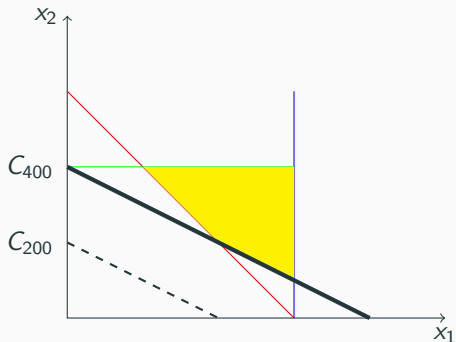
$$\min Z = x_1 + 2x_2$$



Soluções óptimas $[A, D] \rightarrow Z^* = 400$ CBO

Região admissível limitada e soluções óptimas alternativas

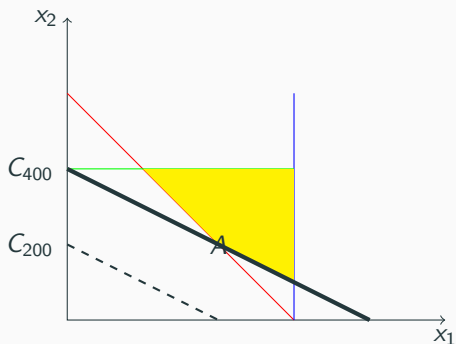
$$\min Z = x_1 + 2x_2$$



Soluções óptimas $[A, D] \rightarrow Z^* = 400$ CBO

Região admissível limitada e soluções óptimas alternativas

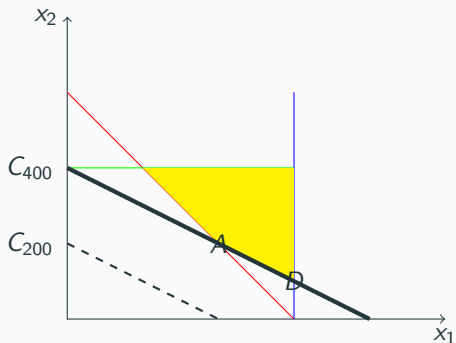
$$\min Z = x_1 + 2x_2$$



Soluções óptimas $[A, D] \rightarrow Z^* = 400$ CBO

Região admissível limitada e soluções óptimas alternativas

$$\min Z = x_1 + 2x_2$$



Soluções óptimas $[A, D] \rightarrow Z^* = 400$ CBO

**Região admissível não limitada e
uma solução óptima**

Região admissível não limitada e uma solução óptima

$$\min Z = x_1 + 1.5x_2 \quad (19)$$

subject to

$$x_1 + x_2 \geq 300 \quad (20)$$

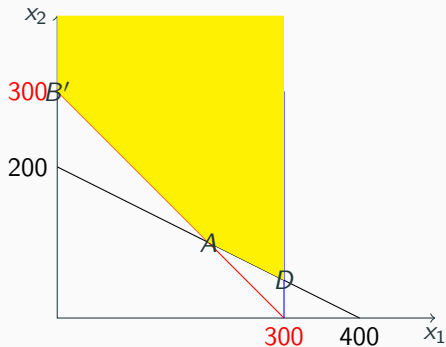
$$100x_1 + 200x_2 \geq 40000 \quad (21)$$

$$x_1 \leq 300 \quad (22)$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \quad (23)$$

Região admissível não limitada e uma solução óptima

$$\min Z = x_1 + 1.5x_2$$

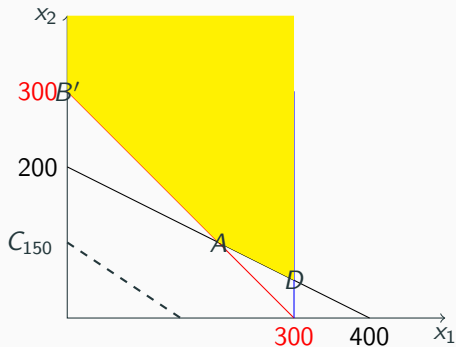


$$B' = \begin{cases} x_1 + x_2 = 300 \\ x_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 300 \end{cases}$$

Optimal solution $A = (200, 100) \rightarrow Z^* = 350$

Região admissível não limitada e uma solução óptima

$$\min Z = x_1 + 1.5x_2$$

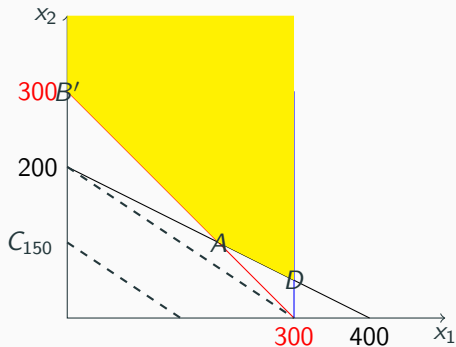


$$B' = \begin{cases} x_1 + x_2 = 300 \\ x_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 300 \end{cases}$$

Optimal solution $A = (200, 100) \rightarrow Z^* = 350$

Região admissível não limitada e uma solução óptima

$$\min Z = x_1 + 1.5x_2$$

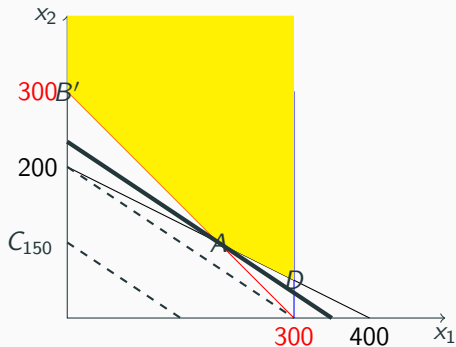


$$B' = \begin{cases} x_1 + x_2 = 300 \\ x_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 300 \end{cases}$$

Optimal solution $A = (200, 100) \rightarrow Z^* = 350$

Região admissível não limitada e uma solução óptima

$$\min Z = x_1 + 1.5x_2$$



$$B' = \begin{cases} x_1 + x_2 = 300 \\ x_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 300 \end{cases}$$

Optimal solution $A = (200, 100) \rightarrow Z^* = 350$

Região admissível não limitada e soluções óptimas alternativas

$$\min Z = x_1 + 2x_2 \quad (24)$$

subject to

$$x_1 + x_2 \geq 300 \quad (25)$$

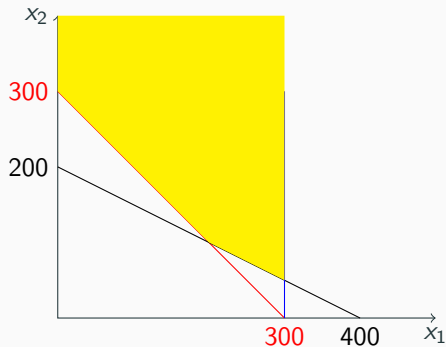
$$100x_1 + 200x_2 \geq 40000 \quad (26)$$

$$x_1 \leq 300 \quad (27)$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \quad (28)$$

Região admissível não limitada e soluções ótimas alternativas

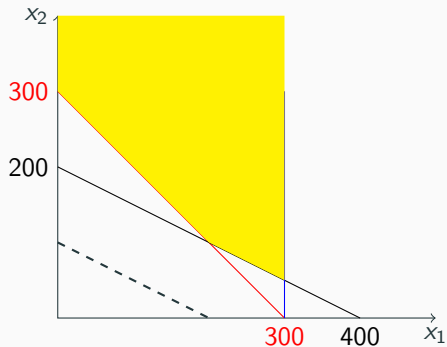
$$\min Z = x_1 + 2x_2$$



Soluções ótimas $[A, D] \rightarrow Z^* = 400$

Região admissível não limitada e soluções ótimas alternativas

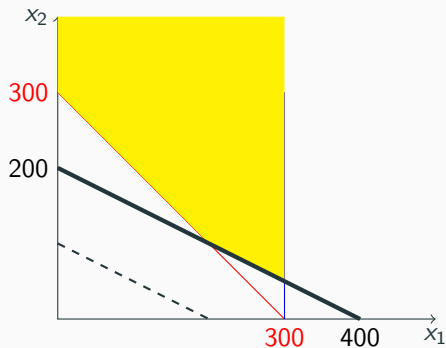
$$\min Z = x_1 + 2x_2$$



Soluções ótimas $[A, D] \rightarrow Z^* = 400$

Região admissível não limitada e soluções ótimas alternativas

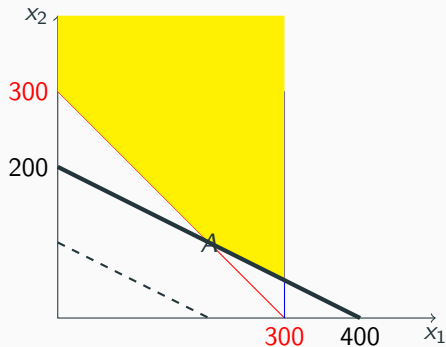
$$\min Z = x_1 + 2x_2$$



Soluções ótimas $[A, D] \rightarrow Z^* = 400$

Região admissível não limitada e soluções ótimas alternativas

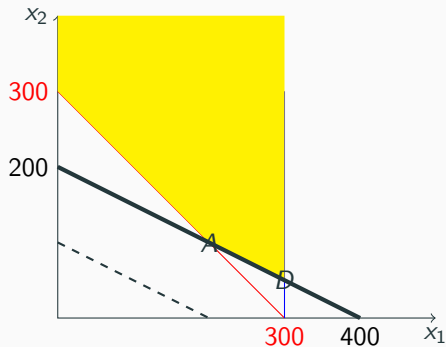
$$\min Z = x_1 + 2x_2$$



Soluções ótimas $[A, D] \rightarrow Z^* = 400$

Região admissível não limitada e soluções ótimas alternativas

$$\min Z = x_1 + 2x_2$$



Soluções ótimas $[A, D] \rightarrow Z^* = 400$

$$\min Z = x_1 \quad (29)$$

subject to

$$x_1 + x_2 \geq 300 \quad (30)$$

$$100x_1 + 200x_2 \geq 40000 \quad (31)$$

$$x_1 \leq 300 \quad (32)$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \quad (33)$$

Região admissível não limitada e soluções óptimas alternativas

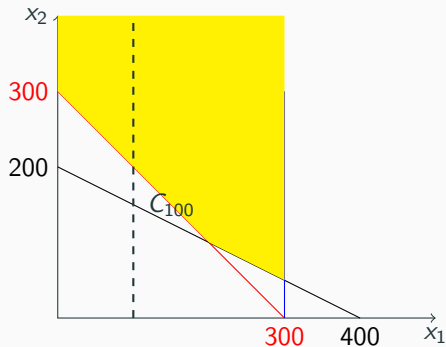
$$\min Z = x_1$$



Soluções óptimas $[B, +\infty[\rightarrow Z^* = 0$

Região admissível não limitada e soluções óptimas alternativas

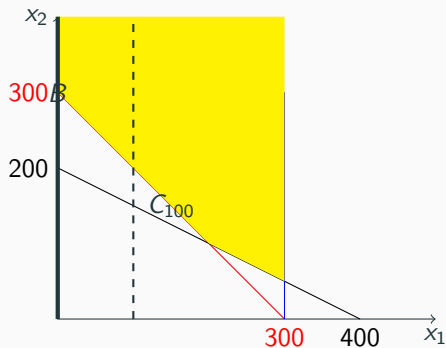
$$\min Z = x_1$$



Soluções óptimas $[B, +\infty[\rightarrow Z^* = 0$

Região admissível não limitada e soluções óptimas alternativas

$$\min Z = x_1$$



Soluções óptimas $[B, +\infty[\rightarrow Z^* = 0$

**Região admissível não limitada e
solução óptima não limitada**

Região admissível não limitada e solução óptima não limitada

$$\max Z = x_1 + 1.5x_2 \quad (34)$$

subject to

$$x_1 + x_2 \geq 300 \quad (35)$$

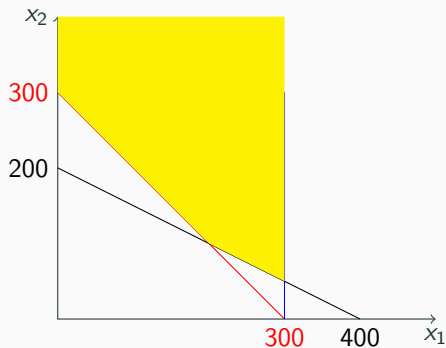
$$100x_1 + 200x_2 \geq 40000 \quad (36)$$

$$x_1 \leq 300 \quad (37)$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \quad (38)$$

Região admissível não limitada e solução óptima não limitada

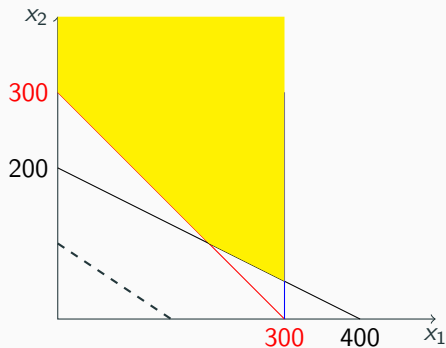
$$\max Z = x_1 + 1.5x_2$$



∄ soluções óptimas (solução óptima não limitada) $\rightarrow Z^* = +\infty$

Região admissível não limitada e solução óptima não limitada

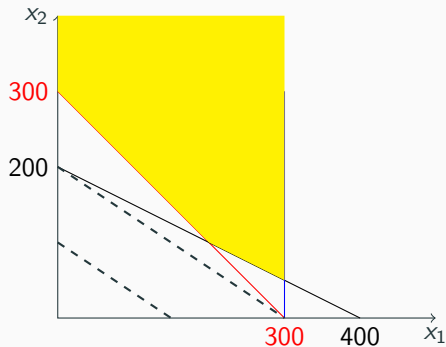
$$\max Z = x_1 + 1.5x_2$$



∄ soluções óptimas (solução óptima não limitada) $\rightarrow Z^* = +\infty$

Região admissível não limitada e solução óptima não limitada

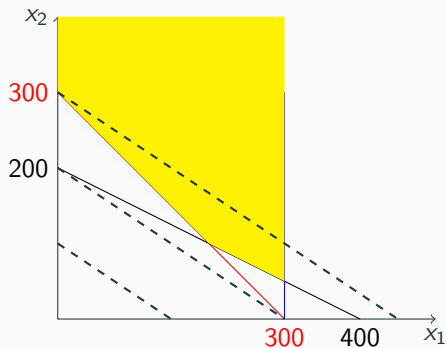
$$\max Z = x_1 + 1.5x_2$$



∄ soluções ótimas (solução óptima não limitada) $\rightarrow Z^* = +\infty$

Região admissível não limitada e solução óptima não limitada

$$\max Z = x_1 + 1.5x_2$$



∄ soluções óptimas (solução óptima não limitada) $\rightarrow Z^* = +\infty$

Problema impossível

Problema impossível

$$\min Z = x_1 + 1.5x_2 \quad (39)$$

subject to

$$x_1 + x_2 \geq 300 \quad (40)$$

$$100x_1 + 200x_2 \geq 40000 \quad (41)$$

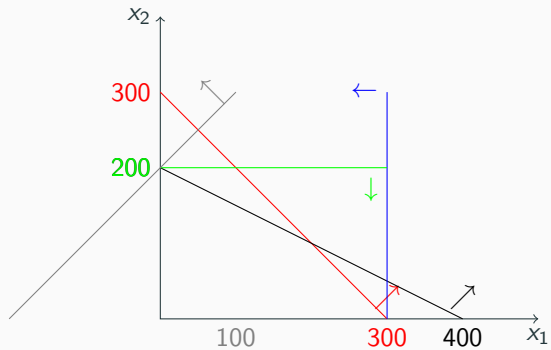
$$x_1 \leq 300 \quad (42)$$

$$x_2 \leq 200 \quad (43)$$

$$-100x_1 + 100x_2 \geq 20000 \quad (44)$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \quad (45)$$

Problema impossível



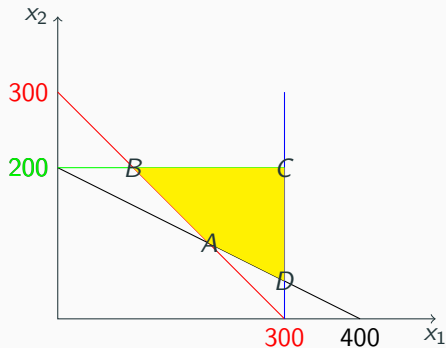
Resumo

Região admissível de um PPL	{	limitada	{	uma solução ótima
				soluções ótimas alternativas ($\# \infty$)
		não limitada	{	uma solução ótima
				soluções ótimas alternativas ($\# \infty$)
				\nexists solução ótima
		empty	{	\nexists soluções

Se a região admissível de um problema de PL é limitada (e não vazia), então existe um vértice da região admissível que é solução óptima do problema.

Voltando ao "Manter o rio limpo"

Região admissível e vértices



Vértice (x_1, x_2)	$Z = x_1 + 1.5x_2$
A (200,100)	350 ←
B (100,200)	400
C (300,200)	600
D (300,50)	375

TPC

- Exercícios 27 - 2, 3

- J. Buongiorno, J.K. Gilless. 2003 (1ª edição). *Decision Methods for Forest Resource Management*, Academic Press.