Análise Matemática – Aula Prática 4

Adelino Paiva

Instituto Superior de Agronomia

Paridade de funções e polinómios de Maclaurin

Definição

- Uma função f diz-se <u>par</u>, se $f(-x) = f(x)$ para todo o $x \in D_f$.
- Uma função f diz-se <u>ímpar</u>, se $f(-x) = -f(x)$ para todo o $x \in D_f$.

Teorema

Se f é uma função ímpar e $0 \in D_f$, então $f(0) = 0$.

Demonstração.

Se f é ímpar, então

$$f(-0) = -f(0) \Leftrightarrow f(0) = -f(0) \Leftrightarrow 2f(0) = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0. \qquad \square$$

Paridade de funções e polinómios de Maclaurin

Teorema

Seja f uma função diferenciável num intervalo aberto I centrado em 0. Se f é par, então f' é ímpar.

Demonstração.

Se f é par, $f(-x) = f(x)$ $\forall x \in I$. Derivando ambos os membros tem-se

$$\begin{aligned} [f(-x)]' = [f(x)]' &\Leftrightarrow (-x)' f'(-x) = f'(x) \\ &\Leftrightarrow -f'(-x) = f'(x) \\ &\Leftrightarrow f'(-x) = -f'(x). \end{aligned}$$

Logo f' é ímpar. $\square$

Paridade de funções e polinómios de Maclaurin

Teorema

Seja f uma função diferenciável num intervalo aberto I centrado em 0. Se f é ímpar, então f' é par.

Demonstração.

Se f é ímpar, $f(-x) = -f(x)\ \forall x \in I$. Derivando ambos os membros tem-se

$$\begin{aligned}
[f(-x)]' = [-f(x)]' &\Leftrightarrow (-x)'f'(-x) = -f'(x) \\
&\Leftrightarrow -f'(-x) = -f'(x) \\
&\Leftrightarrow f'(-x) = f'(x).
\end{aligned}$$

Logo f' é par. $\square$

Paridade de funções e polinómios de Maclaurin

Se f é uma função <u>par</u> n vezes derivável em 0, então

$$\begin{aligned} f^{(0)} &= f \text{ é par} \\ f^{(1)} &= f' \text{ é ímpar} \\ f^{(2)} &= f'' \text{ é par} \\ f^{(3)} &= f''' \text{ é ímpar} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Logo as derivadas de ordem <u>ímpar</u> de f anulam-se na origem.

Se f é uma função <u>ímpar</u> n vezes derivável em 0, então

$$\begin{aligned} f^{(0)} &= f \text{ é ímpar} \\ f^{(1)} &= f' \text{ é par} \\ f^{(2)} &= f'' \text{ é ímpar} \\ f^{(3)} &= f''' \text{ é par} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Logo as derivadas de ordem <u>par</u> de f anulam-se na origem.

Paridade de funções e polinómios de Maclaurin

Teorema

Seja I um intervalo aberto centrado em 0, f uma função uma função n vezes derivável em 0, e

$$P_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

- *Se f é par, então $P_n(x)$ só tem potências de x pares.*
- *Se f é ímpar, então $P_n(x)$ só tem potências de x ímpares.*

Demonstração.

- Se f é par, então todas as derivadas de ordem ímpar de f anulam-se na origem. Logo $P_n(x)$ só tem potências de x pares.
- Se f é ímpar, então todas as derivadas de ordem par de f anulam-se na origem. Logo $P_n(x)$ só tem potências de x ímpares. $\square$