Instituto Superior de Agronomia
Modelos Matemáticos e Aplicações – 2020/2021

Teste do Módulo I – duração: 2h30 9 de Março de 2021

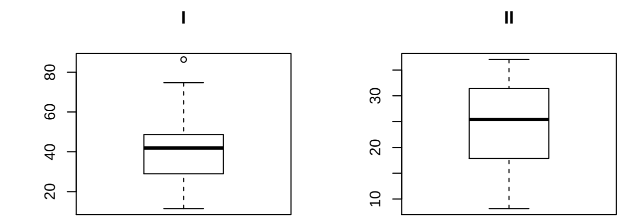
Nota: Alguns cálculos de apoio à resolução deste teste encontram-se em Anexo

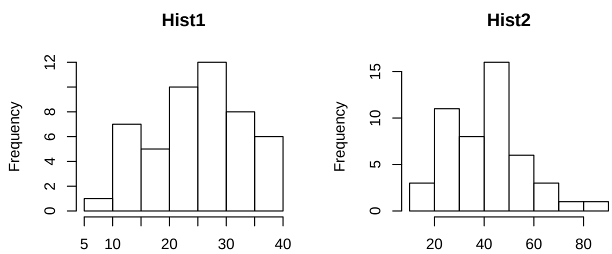
1. Um comprador quer assegurar-se que o peso de pinhão (em gramas) que obterá ao comprar pinha de pinheiro manso é no mínimo 35 gramas em média por pinha. Na fase de negociação um proprietário afirma que a sua pinha dá pinhão que tem, em média, peso superior àquele valor. Para mostrar que tem razão o proprietário faz uma amostragem aleatória, em cada uma de duas plantações de pinheiro manso em dois locais distintos. Obtém uma amostra de 49 pinhas em cada uma das plantações. Para as pinhas amostradas são calculados o peso de cada pinha e o peso do pinhão, que se encontram na *data frame* do R `pinha.pinhao`. Consulte o Anexo para responder às seguintes questões:

a) Identifique as variáveis contidas na *data frame* e classifique-as, justificando.

b) Explique o resultado da execução do comando identificado por **A**.

c) Associe cada *boxplot* ao histograma correspondente, justificando.





d) Para o *boxplot* I explique os cálculos que levaram à sua construção.

e) Considere os resultados referentes à plantação A.

i) Apresente uma análise descritiva dos resultados registados para peso do pinhão por pinha.

ii) Escreva um intervalo de confiança a 95% para o peso médio de pinhão por pinha desta plantação. Justifique convenientemente.

iii) Com base na alínea anterior, o que pode dizer sobre a afirmação do proprietário relativamente ao pinhão desta plantação? Justifique.

iv) Indique, justificando, o que acontece à amplitude do intervalo de confiança obtido em i) para o peso médio de pinhão desta plantação no caso de ter recolhido uma amostra de 100 pinhas. Nota: suponha que não há alteração no valor da variância observada.

f) Considere os dados recolhidos nas duas plantações, A e B.

i) Interprete o comando identificado por B e respectivo resultado.

ii) Será o peso médio de pinhão na plantação A superior ao peso médio do pinhão na plantação B? Justifique convenientemente.

2. Admita que o peso das pinhas da plantação A segue uma distribuição normal de valor médio 264 g e desvio padrão 68 gramas e que o proprietário as vende a 0.90 euros/kg.

a) Determine os limite do intervalo de peso que contém 90% das pinhas daquela plantação.

b) Qual a probabilidade de uma pinha, escolhida ao acaso, pesar mais de 400 g?

c) As pinhas são colocadas, ao acaso, em sacas que se consideram cheias com 50 pinhas. Responda às seguintes questões, justificando convenientemente.

i) Qual a probabilidade de numa saca haver no máximo 3 pinhas com mais de 400 gramas?

ii) Qual a probabilidade de o preço de uma saca cheia ser inferior a 12.5 euros?

3. Diga, justificando convenientemente, se são **verdadeiras** ou **falsas** as afirmações em cada uma das seguintes alíneas. Corrija as que considerar falsas.

a) Considere o par aleatório (X, Y).

i) Se $Cov(X, Y) = 3$ então X e Y não são independentes.

ii) $Var(X - Y) = Var(X) - Var(Y)$.

b) Seja X uma variável aleatória.

i) Se $X \frown Poisson(3)$ então $P[2 < X < 3] = 0$.

ii) Se $X \frown \mathcal{N}(0, 1)$ então $P[X = 0] = 1/2$.

iii) Se $X \frown \mathcal{N}(5, 2)$ o comando em R necessário para obter 50 valores com esta lei é `rnorm(50)`.

c) Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de dimensão n, proveniente de uma população X com valor médio μ e seja $\overline{X}$ a média da amostra aleatória.

i) Se $X \frown Bernoulli(p)$ então $n\overline{X} \frown B(n, p)$.

ii) $E[\mu] = \overline{X}$.

4. Considere a v.a. X que caracteriza o tempo até se observar alguma reacção na aplicação de um tratamento numa dada cultura. X é caracterizada pela seguinte função densidade, dependente do parâmetro, $\beta > 0$, desconhecido:

$$f(x|\beta) = \sqrt{\frac{2}{\beta\pi}}\, e^{-\dfrac{x^2}{2\beta}}, \qquad x > 0,\ \beta > 0.$$

Sabe-se que $E[X] = \sqrt{\dfrac{2\beta}{\pi}}$, e $E[X^2] = \beta$.

Considere que dispõe de uma amostra aleatória de dimensão n, $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, associada a X.

a) Determine o estimador de β calculado pelo método dos momentos.

b) Determine o estimador de máxima verosimilhança para β.

c) Foi observada a seguinte amostra de 12 valores de X:

0.9 0.6 1.2 0.4 1.3 1.7 1.5 2.2 0.7 0.8 1.8 0.3

Calcule estimativas de β .

ANEXO

```
> pinha.pinhao<-read.table(file="pinhas-pinhao.csv", sep=";",header=TRUE, as.is=TRUE)
>
> names(pinha.pinhao)
[1] "Plantacao"       "ppinha"          "ppinhao"

> dim(pinha.pinhao)
[1] 98  3

> head(pinha.pinhao)
  Plantacao    ppinha   ppinhao
1         A    301.89    56.39
2         A    274.55    45.10
3         A    300.89    44.52
4         A    307.01    41.50
5         A    205.45    23.62
6         A    310.84    61.22
> attach(pinha.pinhao)

> ppinhaoA<-ppinhao[Plantacao=="A"]    #Comando A
> ppinhaoB<-ppinhao[Plantacao=="B"]

> library(fBasics)
> basicStats(ppinhaoA)
             ppinhaoA
nobs        49.000000
NAs          0.000000
Minimum     11.500000
Maximum     86.330000
1. Quartile 28.970000
3. Quartile 48.660000
Mean        40.754898
Median      41.890000
Sum       1996.990000
SE Mean      2.257321
LCL Mean    36.216249
UCL Mean    45.293547
Variance   249.679476
Stdev       15.801249
Skewness     0.454293
Kurtosis     0.030192

>  summary(ppinhaoB)
   Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
   8.15   17.88   25.43   24.68   31.40   37.03

> shapiro.test(ppinhaoA)
    Shapiro-Wilk normality test

data:  ppinhaoA
W = 0.9776, p-value = 0.4704

> shapiro.test(ppinhaoB)
    Shapiro-Wilk normality test

data:  ppinhaoB
W = 0.9582, p-value = 0.07973


> shapiro.test(ppinhaoA-ppinhaoB)
        Shapiro-Wilk normality test

data:  ppinhaoA - ppinhaoB
W = 0.9749, p-value = 0.3745
```

```
> var.test(ppinhaoA,ppinhaoB)   # Comando B

        F test to compare two variances

data:  ppinhaoA and ppinhaoB
F = 3.9276, num df = 48, denom df = 48, p-value = 5.402e-06
alternative hypothesis: true ratio of variances is not equal to 1
95 percent confidence interval:
 2.215437 6.962814
sample estimates:
ratio of variances
          3.927553


> t.test(ppinhaoA,ppinhaoB,paired=TRUE)

        Paired t-test

data:  ppinhaoA and ppinhaoB
t = 6.4205, df = 48, p-value = 5.695e-08
alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0
95 percent confidence interval:
 11.03766 21.10275
sample estimates:
mean of the differences
                16.0702


> t.test(ppinhaoA,ppinhaoB,alternative="greater")

        Welch Two Sample t-test

data:  ppinhaoA and ppinhaoB
t = 6.3558, df = 70.955, p-value = 8.724e-09
alternative hypothesis: true difference in means is greater than 0
95 percent confidence interval:
 11.85632      Inf
sample estimates:
mean of x mean of y
 40.75490  24.68469


> t.test(ppinhaoA,ppinhaoB,paired=TRUE,alternative="greater")

        Paired t-test

data:  ppinhaoA and ppinhaoB
t = 6.4205, df = 48, p-value = 2.848e-08
alternative hypothesis: true difference in means is greater than 0
95 percent confidence interval:
 11.87217      Inf
sample estimates:
mean of the differences
                16.0702
```