AULAS 3 & 4

Introdução à Teoria da Estimação e à Inferência Estatística.

Plano das aulas 3 & 4

1. Probabilidade e Inferência
2. Em jeito de resumo...
3. Introdução à Teoria da Amostragem
4. Teoria da Estimação–introdução
5. Estimação pontual: estimador e estimativa
6. Propriedades dos estimadores
7. Métodos de Estimação
   - O método dos momentos
   - O Método da Máxima Verosimilhança
   - Propriedades dos estimadores de Máxima Verosimilhança
   - A máxima verosimilhança no 
8. Estimadores mais usuais e distribuições de amostragem –resumo

Probabilidade e Inferência

Pode dizer-se que a Probabilidade e a Inferência têm objectivos diferentes: enquanto na Probabilidade se parte de um dado esquema ou modelo para calcular a probabilidade de certos resultados ou acontecimentos se realizarem; na Inferência parte-se de dados ou observações e procura saber-se ou inferir-se algo sobre o modelo.

A Inferência é a “passagem do particular ao geral."

A Inferência Estatística tem como objectivo definir procedimentos que, aplicados a uma amostra extraída da população, nos permitam estimar parâmetros desconhecidos dessa população ou algo sobre o modelo da população.

De facto uma amostra particular é apenas uma das muitas amostras (em n^o infinito se a população for infinita) que se podem obter por um processo de amostragem.

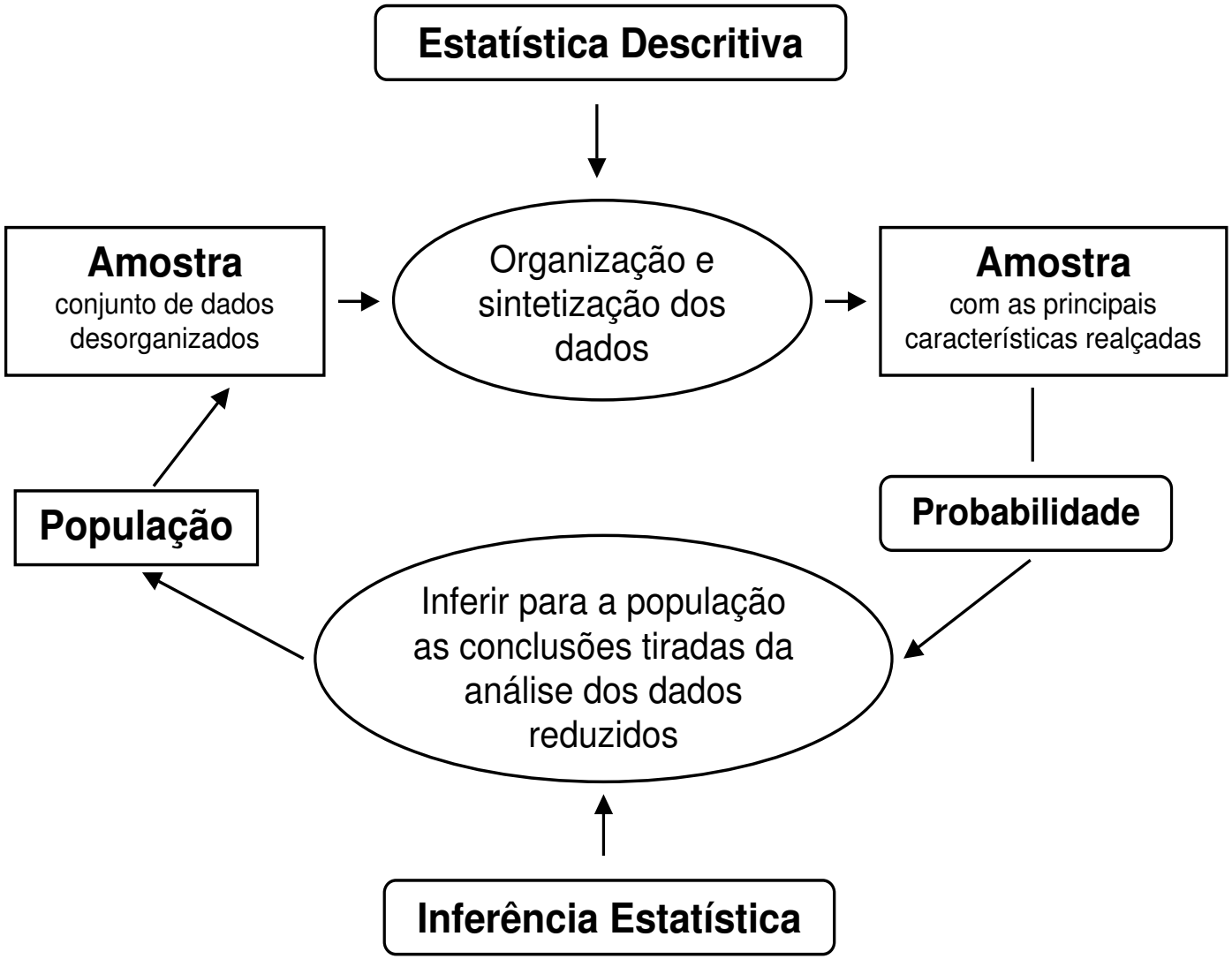
Probabilidade e Inferência

A extensão do particular ao geral chama-se inferência indutiva. É o caminho para a aquisição de novos conhecimentos.
O grau de incerteza que acompanha as inferências indutivas pode ser medido rigorosamente em termos de probabilidade, se a experiência foi conduzida segundo determinados princípios (probabilísticos ou aleatórios).

Os procedimentos que levam à obtenção de amostras são do domínio da Teoria da Amostragem.

Enquanto a Amostragem se refere, regra geral, a procedimentos de recolha de dados representativos de populações finitas, o Planeamento de Experiências refere-se à "produção" de dados, quando se controla a variação de algumas variáveis, ficando uma ou mais livres

Em jeito de resumo...



Introdução à Teoria da Amostragem

Seja X a variável de interesse numa população em estudo.

Na teoria da amostragem usam-se procedimentos de recolha de elementos da população para obter uma amostra.
O objectivo dessa amostra é usá-la para inferir sobre propriedades da variável em estudo. É preocupação da teoria da amostragem:

- a recolha de amostras representativas da população;
- a determinação da dimensão da amostra (para a qual é crucial estimar a variabilidade da característica) que permita obter estimativas de parâmetros de interesse com uma dada precisão.

Antes de referirmos alguns conceitos preliminares em amostragem, vejamos um exercício:

Exercício 1

Vamos supor que temos um campo rectangular de 5 km $\times$ 4 km e pretendemos escolher ao acaso áreas de 100 m $\times$ 100 m. Podemos definir um par de coordenadas (i, j), com $i = 1, 2, \cdots, 50$ e $j = 1, 2, \cdots, 40$. Então a escolha aleatória de, por exemplo, 10 parcelas podia ser assim feita:

```
> ndim<-10; nlinhas<-seq(1:50);ncol<-seq(1:40)
> i<-sample(nlinhas,ndim);j<-sample(ncol,ndim)
> parcelas<-cbind(i,j);parcelas
```

```
      i  j
 [1,] 27 34
 [2,] 14  3
 [3,] 36  4
 ...
```

Definição 1

As variáveis aleatórias $X_1, X_2, \cdots X_n$ constituem uma amostra aleatória de dimensão n , que se costuma representar por $\underline{X} = (X_1, X_2, \cdots X_n)$, retirada de uma população X, se são mutuamente independentes e têm a mesma distribuição que X

Seja $\boldsymbol{(x_1, x_2, \cdots x_n)}$ uma amostra de n observações da característica, obtidas após um processo de amostragem.

Cada um daqueles valores é uma realização de $\boldsymbol{n}$ variáveis $(X_1, X_2, \cdots X_n)$ que são "réplicas" da variável $\boldsymbol{X}$

Teoria da Estimação

A **Inferência Estatística** pretende responder a dois grandes problemas:

- calcular valores aproximados (estimativas) e obter intervalos de confiança para parâmetros desconhecidos da população.
- formular hipóteses e verificar se há concordância entre o que se supõe e os factos – testes de hipóteses

O primeiro problema é do domínio da Teoria da Estimação. Se;

- o valor desconhecido do parâmetro θ, usando o conhecimento, mesmo aproximado, da distribuição da população (estimação paramétrica);
- a função distribuição desconhecida da variável em estudo, F ou parâmetros sem o pressuposto do conhecimento de um modelo para a população (estimação não paramétrica).

Estimação pontual: estimador e estimativa

Dada uma amostra aleatória $(X_1, X_2, ..., X_n)$ chama-se **estatística** a uma função da amostra aleatória que não envolve parâmetros desconhecidos.

Definição

Chama-se **estimador** de $\underline{\theta}$ a uma estatística que a cada amostra observada faz corresponder um valor que estima $\underline{\theta}$, a que chamamos uma **estimativa** de $\underline{\theta}$.

$$\Theta^*(X_1, X_2, ..., X_n) \quad \text{é um estimador}$$
$$\theta^*(x_1, x_2, ..., x_n) \quad \text{é uma estimativa}$$

Não confundir

– estimador– variável aleatória

– estimativa–valor aproximado do parâmetro, obtido pelo estimador usando uma amostra particular

Estimação pontual: estimador e estimativa

Exemplo: São estimadores

i) $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i/n$ e ii) $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$.

Observada, por exemplo, a amostra $(1, 2, 0, 3, 1, 5)$

As estimativas associadas àqueles estimadores são:

i) $\overline{x} = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} x_i = 2$ e ii) $s^2 = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{6}(x_i - \overline{x})^2 = 3.2$

Consideremos o caso de termos uma dada população com distribuição $F(x|\theta)$, com um parâmetro desconhecido θ.

Como se podem definir vários estimadores de um parâmetro, põe-se o problema de escolher, se possível "o melhor". Há então que considerar certas propriedades que um estimador deve verificar.

Propriedades dos estimadores

Vejamos algumas:

1. Consistência

Um estimador Θ^* diz-se convergente ou consistente para o parâmetro θ se $\Theta^* \xrightarrow{P} \theta$.

Prova-se que é condição suficiente de convergência de um estimador Θ^* para θ que

$$Var(\Theta^*) \to 0 \qquad \text{e} \qquad E(\Theta^*) \to \theta$$

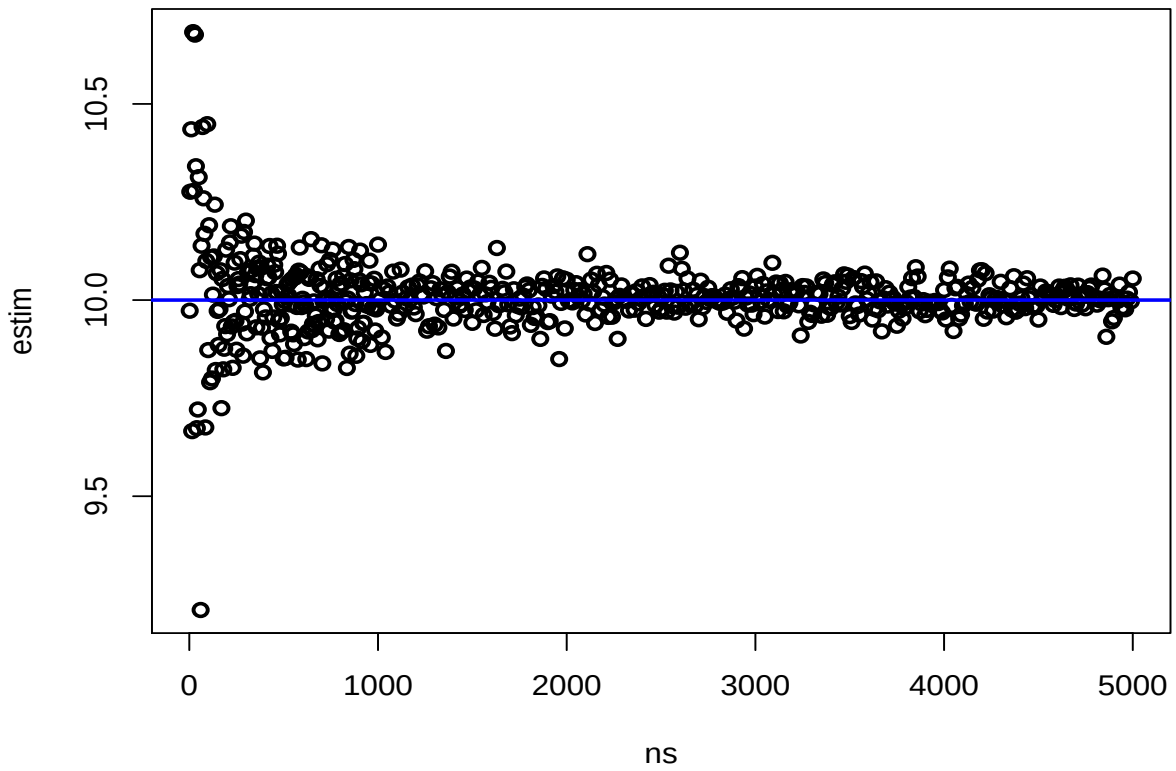
Vejamos o seguinte exemplo ilustrando a convergência de um estimador.

Exemplo

Consideremos uma população $\mathcal{N}(10, 2)$ e vejamos, utilizando o  , o comportamento da média amostral para várias dimensões de amostras, $n = 2, 5, 10, 15, 20, ..., 1000, 1010, 1020, ..., 5000$

```
> ns <- c(2, seq(5, 1000, by = 5), seq(1010, 5000, by = 10))
> estim <- numeric(length(ns))  # tb podia fazer-se estim<-c()
> for (i in 1:length(ns)) {
+ amostra <- rnorm(ns[i], 10, 2)
+ estim[i] <- mean(amostra)
+ }
> plot(ns, estim,lwd=2)
> abline(h = 10,lwd=2,col=4)
```

Ilustrando a convergência



2. Não enviesamento

O estimador Θ^* diz-se centrado ou não enviesado se $E(\Theta^*) = \theta$.

Na verdade é uma propriedade que muitos estimadores não possuem e daí ter mais interesse definir uma medida da diferença entre o estimador e o parâmetro que ele pretende estimar.

É o chamado **viés** (ou em inglês '**bias**') que representaremos por $b_\theta(\Theta^*)$ e se define como

$$b_\theta(\Theta^*) = E(\Theta^*) - \theta$$

3. Erro quadrático médio

Chama-se erro quadrático médio do estimador Θ^* a $EQM(\Theta^*) = E\left[(\Theta^* - \theta)^2\right]$.

Esta propriedade é um dos critérios mais usados para comparar estimadores.

É muito fácil mostrar que

$$EQM(\Theta^*) = Var[\Theta^*] + [b_\theta(\Theta^*)]^2$$

Se Θ^* é um estimador centrado de um parâmetro então o erro quadrático médio $\equiv$ variância, i.e.

$$E\left[(\Theta^* - \theta)^2\right] = Var(\Theta^*)$$

Ilustração da precisão e da exactidão

O termo exactidão (accuracy) refere-se à proximidade de uma medição ou estimativa ao verdadeiro valor.
O termo precisão ou variância (precision) refere-se ao "grau de concordância numa sucessão de medições".

Propriedades dos estimadores

Situação desejável: estimador centrado com variância mínima.
Diz-se que temos o estimador mais eficiente.

Um estimador de um parâmetro θ é o mais eficiente se tiver a menor probabilidade de se afastar de θ, i.e, com dispersão mínima.

Se não conseguirmos estimadores centrados interessa-nos procurar estimadores que tenham um EQM mínimo, i.e.,

$$\forall \tilde{\Theta} \qquad \mathrm{E}\left[(\Theta^* - \theta)^2\right] \leqslant \mathrm{E}\left[\left(\tilde{\Theta} - \theta\right)^2\right] \qquad \forall \theta$$

Existe um critério estabelecido na chamada desigualdade de Fréchet–Cramér–Rao que, sob certas condições, permite obter um limite inferior para o EQM de um estimador (para mais informações ver Murteira e Antunes (2012) e Casella e Berger (2002))

Métodos de Estimação

Até aqui falámos em estimadores e nas propriedades que devem possuir. Interessa ter procedimentos que construam estimadores com boas propriedades.

Vamos então falar dos principais métodos de estimação paramétrica.

Dos **métodos de estimação paramétrica** vamos referir:

- o Método dos momentos e
- o Método da Máxima verosimilhança

O método dos momentos

Introduzido por Karl Pearson no início do século XX, foi o primeiro método de estimação a ser apresentado e que tem uma filosofia muito simples.

O método consiste em:

– considerar como estimadores dos parâmetros desconhecidos as soluções das equações que se obtêm igualando os momentos teóricos aos momentos empíricos.

É um método de aplicação geral, tendo como única condição que a distribuição tenha um número suficiente de momentos (teóricos).

O método dos momentos

Sejam $\theta_1, ..., \theta_k$ parâmetros desconhecidos de uma v.a. X.
O método dos momentos consiste em igualar momentos teóricos e momentos empíricos, i.e.,

Momentos Teóricos		**Momentos Empíricos**
$E[X] = m'_1$	c/	$m'_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$
$E[X^2] = m'_2$	c/	$m'_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$
$\vdots$		
$E[X^k] = m'_k$	c/	$m'_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^k$

$m'_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^k$ são os chamados momentos empíricos, calculados à custa da amostra $(x_1, ..., x_n)$.

Aquelas igualdades dão-nos estimativas que são concretização dos estimadores com as expressões correspondentes.

O método dos momentos– exemplos

Exemplo

Consideremos $X \frown \mathcal{N}(\mu, \sigma)$. Quais os estimadores de momentos de μ e σ^2?

Tem-se :

$$E[X] = \mu \quad \text{e} \quad M_1' = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \overline{X}$$
$$E[X^2] = \sigma^2 + \mu^2 \quad \text{e} \quad M_2' = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

donde

$$\mu^* = \overline{X}$$
$$(\sigma^2)^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \mu^{*2} \Rightarrow (\sigma^2)^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$

Exercício

Considere $X \frown \mathcal{P}(\lambda)$. Determine o estimador de momentos de λ.

O método dos momentos

Os cálculos não são complicados, mas no cálculo dos momentos empíricos aparecem potências de expoente elevado quando há muitos parâmetros, conduzindo a estimativas instáveis.
Por isso, como regra prática deve evitar-se recorrer ao método dos momentos para mais de quatro parâmetros.

Nota: Os estimadores obtidos pelo método dos momentos são menos eficientes do que os estimadores de máxima verosimilhança, que passamos já a apresentar.

A Verosimilhança

Seja X uma v.a. cuja distribuição depende de um parâmetro θ, desconhecido, e $(X_1, ..., X_n)$ uma amostra aleatória. Seja $(x_1, ..., x_n)$ a amostra observada.

Definição

Chama-se **verosimilhança da amostra** e representa-se por $\mathcal{L}(\theta|x_1, x_2, ..., x_n)$ a

$$f(x_1, ..., x_n|\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\theta) \qquad \text{caso contínuo}$$

$$P(X_1 = x_1, ..., X_n = x_n|\theta) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i = x_i|\theta) \qquad \text{caso discreto}$$

O Método da Máxima Verosimilhança (MMV)

O método da máxima verosimilhança, proposto por Fisher em 1922 e desenvolvido em 1925 consiste em escolher como estimativa de θ o valor que **maximiza a verosimilhança** $\mathcal{L}(\theta|\boldsymbol{x_1}, ..., \boldsymbol{x_n})$, face a uma amostra observada $(x_1, ..., x_n)$.

Vejamos uma ilustração no 

Exemplo muito simples

Num pequeno lago que temos no jardim há peixes. Eu gostava de saber quantos peixes terá o lago. Como posso "estimar"?
Um procedimento comum é o chamado método de captura-recaptura, de que já falaram certamente quando deram o modelo de probabilidade hipergeométrico. Como se descreve o método?
– Apanhámos M = 7 peixes, marcámos cada um e libertámo-lo de seguida.
– Aguarda-se uns dias para voltarem "aos seus hábitos" e vamos pescar uns quantos de novo.
– Seja X a v.a. que conta o número de capturados-marcados, i.e. são os recapturados.
– Suponhamos que da segunda vez apanhámos $n = 4$, dos quais 3 estão marcados, então $x = 3$.

O Método da Máxima Verosimilhança (MMV)

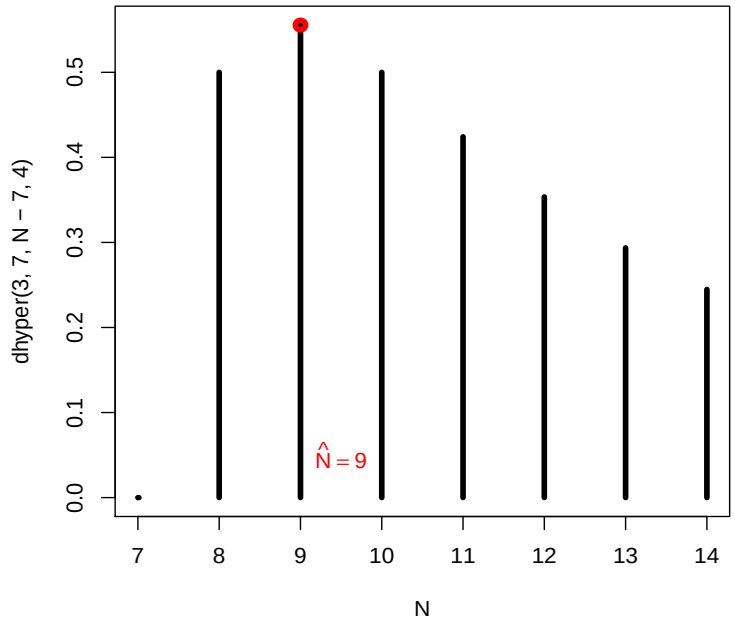
Ora pretendemos saber o número N de peixes que existem no lago
$N = M + (N - M)$;
X designa o número de peixes recapturados.

$$X \frown \mathcal{H}(N, n = 4, M = 7) \qquad \text{então} \qquad P[X = x] = \frac{\binom{7}{x}\binom{N-7}{4-x}}{\binom{N}{4}}$$

Se encontrámos 3 marcados, qual o número de peixes que com maior probabilidade lá existirá?
Sabemos que $N \geq 7$, mas poderá ser $N = 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14...$?
Foi Sir Ronald Fisher fez a pergunta: *"What is the value of N which has the highest likelihood?"*
Ou seja, para os valores possíveis para N qual o que torna máxima a probabilidade acima?
Resolver no  , calculando as probabilidades e fazendo um gráfico

Exemplo muito simples

```
N<-seq(7,14);N
plot(N,dhyper(3,7,N-7,4),type="h",lwd=4)
points(9,dhyper(3,7,2,4),type="p",col=2,lwd=4)
text(9.5,0.05,expression(hat(N)==9),col=2)
```



O Método da Máxima Verosimilhança (MMV)

Em muitas situações as funções de verosimilhança satisfazem condições que permitem que o valor para o qual a versomilhança é máxima seja obtido por derivação.

Porém, e como a função logarítimca é monótona, regra geral é mais cómodo trabalhar com a função **log-verosimilhança**,

$$\log \mathcal{L}(\theta|\underline{x})$$

O Método da Máxima Verosimilhança (MMV)

Então, no caso de existirem derivadas (e para um único parâmetro θ), o valor do maximizante é obtido de modo que:

$$\frac{d \log \mathcal{L}}{d\theta} = 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{d^2 \log \mathcal{L}}{d\theta^2} < 0$$

Note-se que $$\frac{d \log \mathcal{L}}{d\theta} = \sum_{i=1}^{n} \frac{d \log f(x_i|\theta)}{d\theta}$$

A solução, $\hat{\theta}(x_1, ..., x_n)$ é **a estimativa de máxima verosimilhança,** que é uma realização da v.a. $\hat{\Theta} = \hat{\Theta}(X_1, ..., X_n)$.

Vamos fazer um exercício muito simples – determinar o estimador de máxima versomilhança do parâmetro β do modelo exponencial.

Propriedades dos estimadores de Máxima Verosimilhança

Embora possa não ser centrado, o estimador de máxima verosimilhança de um parâmetro genérico θ é o único estimador eficiente (caso exista estimador eficiente) e

— é assintoticamente normal com valor médio θ e variância assintótica dada por

$$\frac{1}{E\left[\left(\frac{\partial \log \mathcal{L}}{\partial \theta}\right)^2\right]} = \frac{1}{nE\left[\left(\frac{\partial \log f}{\partial \theta}\right)^2\right]} = \frac{1}{-E\left[\frac{\partial^2 \log \mathcal{L}}{\partial \theta^2}\right]}$$

A máxima verosimilhança no R

No  existem funções para obter as estimativas de máxima verosimilhança, usando procedimentos iterativos.

Temos, por exemplo, as funções

`mle()` do *package* stats4

`fitdistr()` do *package* MASS

`optimize ()` – adequado quando há só um parâmetro
`optim ()` – adequado quando há dois ou mais parâmetros

Exemplo

Consideremos o ficheiro de dados do R– `PlantGrowth`.
Vamos usar a amostra de valores observados da variável "weight".
Vamos supor que as observações são a concretização de uma a.a. $(X_1, X_2, ..., X_n)$, i.i.d. $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$

Primeiro necessitamos de escrever a função de log-verosimilhança

Observação importante a função de optimização, por omissão calcula mínimos, pelo que devemos escrever a log-verosimilhança negativa

```
>minuslogL <- function(mu, sigma){
  -sum(dnorm(x, mean = mu, sd = sigma, log = TRUE)) }
```

Para obter a estimativa de máxima verosimilhança, o algoritmo de optimização requer valores inicias para os parâmetros a estimar.

Resolução do Exemplo

Considerei a média e o desvio padrão observados e também valores próximos, para ilustrar.

```
>data(PlantGrowth)
>x <- PlantGrowth$weight
>media<-mean(x); dp<-sd(x);media;dp
>library(stats4)
library(stats4)
>MLest1 <- mle(minuslogL, start = list(mu = media, sigma = dp))
 # outra tentativa
>MLest2 <- mle(minuslogL, start = list(mu = 5.1, sigma = 0.5))
>summary(MLest1);summary(MLest2)
Maximum likelihood estimation
Call:
mle(minuslogl = minuslogL, start = list(mu = media, sigma = dp))
Coefficients:
       Estimate Std. Error
mu    5.0730000 0.12586801
sigma 0.6894075 0.08900152
-2 log L: 62.82084
```

Resumo dos principais estimadores e estimativas que iremos usar

Parâmetros que vamos referir , seus estimadores e estimativas

Parâmetro a estimar	Estimador	Estimativa
μ	$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$	$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$
σ^2	$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{n-1}$	$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n-1}$
p	$\widehat{P} = \frac{X^{(a)}}{n}$	$\hat{p} = \frac{x^{(b)}}{n}$
$\mu_1 - \mu_2$	$\overline{X_1} - \overline{X_2}$	$\overline{x_1} - \overline{x_2}$
$\sigma_1^2 \,/\, \sigma_2^2$	$S_1^2 \,/\, S_2^2$	$s_1^2 \,/\, s_2^2$
$p_1 - p_2$	$\widehat{P_1} - \widehat{P_2}$	$\hat{p}_1 - \hat{p}_2$

$^{(a)}$ X - v.a. que conta ... e ˜ $^{(b)}$ x - número observado de sucessos na amostra de dimensão n.

Distribuições por amostragem–resumo

Estimador	Pressuposto	Variável	Distribuição
$\overline{X}$	$X_i \frown \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ σ conhecido	$\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$	$\mathcal{N}(0,1)$
$\overline{X}$	$X_i \frown \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ σ desconhecido	$\frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$	$t_{(n-1)}$
$\overline{X}$	X_i distribuição desconhecida n "grande"	$\frac{\overline{X} - \mu}{s/\sqrt{n}}$	$\sim \mathcal{N}(0,1)$
S^2	$X_i \frown \mathcal{N}(\mu, \sigma)$	$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$	$\chi^2_{(n-1)}$
$\widehat{P}$	$X \frown B(n,p)^{(a)}$ n "grande"	$\frac{X - np}{\sqrt{npq}}$	$\sim \mathcal{N}(0,1)$

$^{(a)}$ X é o n. de sucessos em n provas de Bernoulli.

Distribuições por amostragem–resumo

Estimador	Pressuposto	Variável	Distribuição
$\overline{X}-\overline{Y}$	$X_i \frown \mathcal{N}(\mu_1,\sigma_1)$ $Y_i \frown \mathcal{N}(\mu_1,\sigma_2)$ σ_1 e σ_2 desconhecidos mas é possível admiti-los iguais	$\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_P\sqrt{1/n_1+1/n_2}}$ $s_P^2 = \frac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}$	$t_{(n_1+n_2-2)}$
S_1^2/S_2^2	$X_i \frown \mathcal{N}(\mu_1,\sigma_1)$ $Y_i \frown \mathcal{N}(\mu_2,\sigma_2)$	$\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}$	$F_{(n_1-1,n_2-1)}$

X_i, $i = 1, \cdots n_1$ e

Y_i, $i = 1, \cdots n_2$ são amostras aleatórias independentes.