Análise Matemática – Aula Prática 5

Adelino Paiva

Instituto Superior de Agronomia

Fórmula de Taylor

O resto mede a precisão da aproximação.

$$\boxed{f(x)} = \boxed{P_n(x)} + \boxed{R_n(x)}$$

- Valor exato
- Valor aproximado
- Resto

Assim, $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$. O valor absoluto de $R_n(x)$ é o erro associado à aproximação. Isto é,

$$\text{Erro} = |R_n(x)| = |f(x) - P_n(x)|\,.$$

Fórmula de Taylor

Teorema (Resto de Lagrange de ordem n)

Se f é uma função com derivadas contínuas até à ordem $n+1$ num intervalo aberto I contendo a, então, para cada $x \in I \setminus \{a\}$, existe um ponto c entre a e x com $c \neq a$ e $c \neq x$ tal que

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x)$$

onde

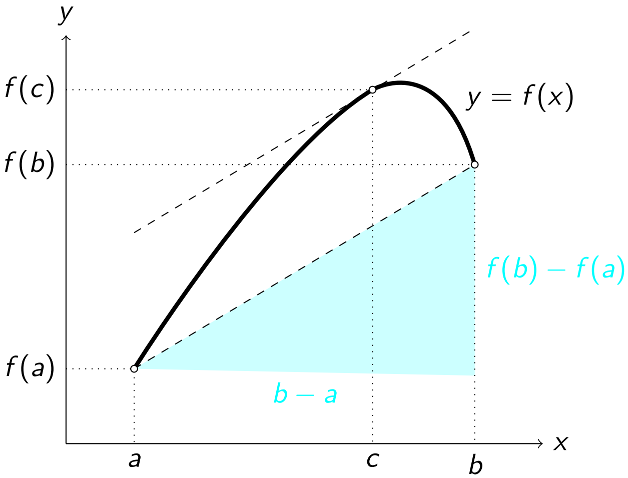
$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Quando $n = 0$ tem-se que

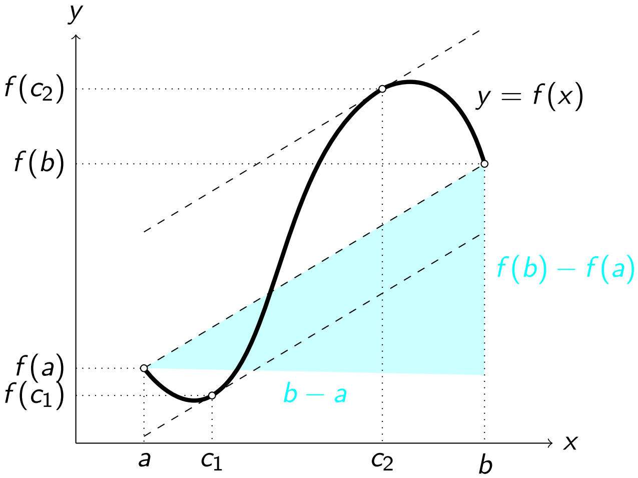
$$f(x) = f(a) + f'(c)(x-a) \Leftrightarrow f'(c) = \frac{f(x) - f(a)}{x-a}$$

e nesse caso obtém-se o teorema de Lagrange já conhecido do secundário.

Como resultado, o ponto c pode ser único



ou não.



Fórmula de Taylor

Teorema (Resto de Lagrange de ordem n)

Se f é uma função com derivadas contínuas até à ordem $n+1$ num intervalo aberto I contendo a, então, para cada $x \in I \setminus \{a\}$, existe um ponto c entre a e x com $c \neq a$ e $c \neq x$ tal que

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Uma consequência importante do resto de Lagrange é que

$$|R_n(x)| \leq \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \max \left| f^{(n+1)}(u) \right|$$

onde $\max \left| f^{(n+1)}(u) \right|$ é o valor máximo que $\left| f^{(n+1)}(u) \right|$ toma em $[x, a]$ (se $x < a$) ou $[a, x]$ (se $a < x$), caso $f^{(n+1)}$ seja contínua no intervalo fechado.

Fórmula de Taylor

Aplicações:

- cálculo de limites,
- cálculo de valores aproximados,
- majoração do erro da aproximação,
- majoração/minoração de funções por polinómios de Taylor num intervalo.