

## Resolução do exercício

Temos uma v.a.  $X$  com função densidade

$$f(x|\theta) = (\theta+1)x^\theta \quad \text{de } 0 < x < 1$$

$\theta$  é um parâmetro desconhecido que pretendemos estimar

- a) Pelo método dos momentos, e como temos 1 um parâmetro, um estimador de  $\theta$  obtém-se como solução da equação

$$E[X] = \bar{X} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\theta+1}{\theta+2} = \bar{X} \Leftrightarrow \theta+1 = (\theta+2)\bar{X}$$

$$\Leftrightarrow \theta - \theta\bar{X} = 2\bar{X} - 1 \Leftrightarrow \theta^* = \frac{2\bar{X} - 1}{1 - \bar{X}}$$

← estimador obtido pelo método dos momentos.

- b) O estimador de máxima verossimilhança é o valor que maximiza a função verossimilhança. Então vamos ver:

$$\text{de } f(x|\theta) = (\theta+1)x^\theta$$

a verossimilhança é

$$\begin{aligned} L(\theta|x_1, \dots, x_n) &= f(x_1|\theta) \cdot f(x_2|\theta) \cdots f(x_n|\theta) \\ &= (\theta+1)x_1^\theta (\theta+1)x_2^\theta \cdots (\theta+1)x_n^\theta \end{aligned}$$

$$L(\theta|x) = (\theta+1)^n (\prod x_i)^\theta$$

Vamos logaritmar (para tornar os cálculos + fáceis)

$$\begin{aligned} \log L(\theta|x) &= n \log(\theta+1) + \theta \log(\prod x_i) \\ &= n \log(\theta+1) + \theta \sum_{i=1}^n \log(x_i) \end{aligned}$$

$$\frac{d \log L(\theta|x)}{d\theta} = \frac{n}{\theta+1} + \sum \log(x_i) = 0$$

$$\Rightarrow \theta+1 = - \frac{n}{\sum \log(x_i)} \Rightarrow$$

$$\hat{\theta} = -1 - \frac{n}{\sum \log(x_i)}$$

← estimador de máxima verossimilhança.

c) Para calcular as estimativas é só calcular  $\bar{x}$  e  $\sum \log(x_i)$  para a amostra dada e substituir em

$$\theta^* = \frac{2\bar{x} - 1}{1 - \bar{x}} \quad \text{e} \quad \hat{\theta}^1 = -1 - \frac{n}{\sum \log(x_i)}$$

e obtemos as estimativas por cada um dos métodos.

comandos R

```
xval <- c(0.34, 0.52, ..., 0.87)
```

```
n <- 15
```

```
theta_est1 <- (2 * mean(xval) - 1) / (1 - mean(xval))
```

```
theta_est2 <- -1 - n / (sum(log(xval)))
```