Regra de Laplace: exemplo 4×4

Exercício na aula

Calcular o determinante de

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

(sol. $\det A = -6$)

Resolução: aplicando a regra de Laplace ao longo da terceira linha que possui 2 zeros, obtém-se:

$$\begin{aligned} \det A &= a_{31}\Delta_{31} + a_{32}\Delta_{32} + a_{33}\Delta_{33} + a_{34}\Delta_{34} \\ &= 2\,(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} + 0 + 1\,(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} + 0 \\ &= 2(-4) + 0 + 1 \cdot 2 + 0 = -6 \end{aligned}$$

TPC: confirme os valores dos 2 determinantes 3×3 anteriores, usando a regra de Sarrus no primeiro e a regra de Laplace no segundo.

Consequências da regra de Laplace

Tem-se (ver o exercício 27 da sebenta):

- Se A possui uma linha ou uma coluna de zeros então $\det A = 0$.
- Se A possui linhas ou colunas múltiplas entre si então $\det A = 0$.
- Se A é uma matriz triangular superior (ou inferior) então $\det A =$ produto dos elementos da diagonal principal:

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

Em particular,

- $\det\left(\text{diag}(a_1, \ldots, a_n)\right) = \det \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix} = a_1 a_2 \cdots a_n.$
- $\det(\alpha I_n) = \det\left(\text{diag}(\alpha, \ldots, \alpha)\right) = \alpha^n.$
- $\det I_n = 1.$

Propriedades do determinante

Proposição

Sejam A e B matrizes quadradas de ordem n e $\alpha \in \mathbb{R}$. Tem-se:

- $\det(AB) = \det A \det B$.
- $\det(A^T) = \det A$.
- $\det(\alpha A) = \alpha^n \det A$!!!
- A é invertível se e só se $\det A \neq 0$ e nessa altura

$$\boxed{\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}}$$

- Para ver o terceiro ponto basta notar que,
  $\det(\alpha A) = \det(\alpha(I_n A)) = \det((\alpha I_n) A) = \det(\alpha I_n) \det A = \alpha^n \det A$.
- Para obter $\det A^{-1}$ basta notar que,
  $$1 = \det I_n = \det(A A^{-1}) = \det A \det A^{-1}.$$
- Atenção: em geral, $\det(A + B) \neq \det A + \det B$!!!

Efeito das operações elementares do método de Gauss sobre o determinante

- O “apagador”, isto é, adicionar um múltiplo de uma linha a outra linha ($L_j \to L_j + \alpha L_i$) não afeta o determinante.
- Trocar duas linhas entre si ($L_i \leftrightarrow L_j$) troca o sinal do determinante.
- Multiplicar uma linha por um escalar $\alpha \neq 0$ ($L_i \to \alpha L_i$) multiplica o determinante por α.

Esquematicamente,

$$\det \begin{bmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_j + \alpha L_i \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix}, \quad \det \begin{bmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix} = -\det \begin{bmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix}, \quad \det \begin{bmatrix} L_1 \\ \vdots \\ \alpha L_i \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix} = \alpha \det \begin{bmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix}.$$

Cálculo do determinante pelo método de Gauss: exemplos

- Calcular o seguinte determinante usando o método de Gauss

$$
\begin{aligned}
\det\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} &= -\det\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (L_1 \leftrightarrow L_2) \\
&= -\det\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -5 \end{bmatrix} \quad (L_3 - 2L_1 \to L_3) \\
&= -\det\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad (L_3 + L_2 \to L_3) \\
&= -(1 \times 1 \times (-2)) = 2 \quad (\text{determ. de matriz triangular})
\end{aligned}
$$

- Note que se no método de Gauss multiplicarmos uma linha da matriz por um escalar $\alpha \neq 0$ temos que multiplicar o determinante da matriz resultante por $1/\alpha$ para não alterar o valor do determinante!
- Por exemplo, na matriz abaixo multiplicou-se a primeira linha por $\frac{1}{2}$ pelo que teve que se multiplicar o determinante da matriz resultante por 2:

$$
\det\begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 0 \\ -2 & 3 & -4 \end{bmatrix} = 2\det\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \\ -2 & 3 & -4 \end{bmatrix}.
$$

Método “híbrido”

- Podemos usar o método de Gauss para “limpar” uma coluna (com excepção do respectivo pivot), para depois se aplicar a regra de Laplace ao longo dessa coluna...

No seguinte exemplo foram envolvidos os 3 métodos distintos dados anteriormente para obter o valor do determinante:

$$
\begin{aligned}
\det\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} &= \det\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{método de Gauss}) \\
&= 1 \times (-1)^{1+1} \det\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{Laplace na } 1^{\underline{a}} \text{ col.}) \\
&= \det\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{matrix} 2 & 3 \\ -3 & -3 \\ 0 & -1 \end{matrix} = 11 \, (\text{regra de Sarrus})
\end{aligned}
$$