Conceitos de vetor e valor próprio

Definições de vetor próprio e valor próprio

Sejam A matriz quadrada de ordem n, $v \in \mathbb{R}^n$ com $v \neq \vec{0}$.
Diz-se que *v é um vetor próprio* de A se existir $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\boxed{Av = \lambda\, v}$$

λ designa-se por valor próprio associado ao vetor próprio v

Exemplo

Considerando $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, tem-se que $v = (1, 1, 1)$ é vetor próprio de A associado ao valor próprio $\lambda = 2$ uma vez que,

$$Av = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 2\, v$$

Valores e vetores próprios de uma matriz

Em geral, para determinar os vetores próprios de uma matriz é necessário começar por determinar os seus valores próprios !

Para isso vamos recordar algumas relações que nos vão ser úteis.

Observação

Seja A matriz quadrada de ordem n. As seguintes afirmações são equivalentes:

- O sistema homogéneo $Ax = \vec{0}$ é indeterminado.
- $\dim \mathcal{N}(A) > 0$.
- $\text{car}(A) < n$.
- A não é invertível.
- $\det(A) = 0$.

Como determinar os valores próprios de uma matriz ?

Tem-se:

- $\lambda \in \mathbb{R}$ é valor próprio de uma matriz A se e só se existe um vetor próprio $v \neq \vec{0}$ tal que $Av = \lambda v$, isto é, $Av - \lambda v = \vec{0}$, ou seja, $(A - \lambda I)v = \vec{0}$.
- A condição anterior significa que o sistema homogéneo $(A - \lambda I)x = \vec{0}$ admite uma solução $v \neq \vec{0}$ e portanto que é indeterminado.
- Pela observação do slide anterior aplicada à matriz $(A - \lambda I)$ tem-se que:

$$\boxed{\lambda \in \mathbb{R} \text{ é valor próprio de } A \quad \Leftrightarrow \quad \det(A - \lambda I) = 0}$$

Exemplo

Consideremos novamente a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ do exemplo do slide 170.

Tem-se que $\lambda = 2$ é valor próprio de A, como visto no slide 170, uma vez que

$$\det(A - 2I) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{(possui uma linha de zeros).}$$

Polinómio característico de uma matriz

Polinómio característico e multiplicidade algébrica

- A expressão $\det(A - \lambda I)$ com $A_{n \times n}$ define um polinómio de grau n na variável λ, que se designa por polinómio característico de A e se denota por $p_A(\lambda)$.
- Pelas conclusões do slide anterior os valores próprios de A são as raízes reais e complexas do polinómio característico $p_A(\lambda)$.
- A *multiplicidade algébrica* de um valor próprio λ, que se denota por m.a.(λ), é o número de vezes que λ aparece repetido como raíz na factorização de $p_A(\lambda)$.

Exemplo do slide 170 revisitado

Consideremos novamente a matriz do slide 170, $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

- Tem-se,

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I) = \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & & \\ & \lambda & \\ & & \lambda \end{bmatrix}\right) \\ &= \underbrace{\det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{bmatrix}}_{\text{Laplace na } 1^{\underline{a}} \text{ coluna}} \\ &= (-1)^{1+1}(1-\lambda)\det\begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 1 & 1-\lambda \end{bmatrix} + 0 + 0 \\ &= (1-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda) = (1-\lambda)^2(2-\lambda). \end{aligned}$$

- $p_A(\lambda)$ admite portanto a raíz dupla $\lambda = 1$ uma vez que aparece repetida 2 vezes na factorização do polinómio e a raíz simples $\lambda = 2$.
- Logo A admite os valores próprios distintos, $\lambda = 1$ com multiplicidade algébrica 2 ($m.a.(1) = 2$) e $\lambda = 2$ com multiplicidade algébrica 1 ($m.a.(2) = 1$).

Subespaço próprio de uma matriz

- Seja λ é um valor próprio de A de ordem n e $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq \vec{0}$([16]). Tem-se:

$$\begin{aligned} v \text{ é vetor próprio de } A \text{ associado a } \lambda &\Leftrightarrow Av = \lambda v \\ &\Leftrightarrow (A - \lambda I)v = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow v \in \mathcal{N}(A - \lambda I). \end{aligned}$$

Tem-se portanto sentido a seguinte definição.

Subespaço próprio e multiplicidade geométrica

Sejam A matriz quadrada de ordem n e $\lambda \in \mathbb{R}$ valor próprio de A.
Chama-se subespaço próprio de A associado a λ ao subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$,

$$E(\lambda) = \mathcal{N}(A - \lambda I)$$

A dimensão de $E(\lambda)$ designa-se por multiplicidade geométrica de λ.

Os vetores próprios de A associados ao valor próprio λ são os vetores não nulos do subespaço próprio $E(\lambda)$.

[16] Note-se que $\vec{0}$ nunca é vetor próprio de uma matriz !

Exemplo do slide 170 revisitado

Consideremos novamente a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Vimos no slide 174 que A admite os valores próprios $\lambda = 1$ e $\lambda = 2$. Vamos calcular os respectivos subespaços próprios $E(1)$ e $E(2)$.

- Tem-se $E(1) = \mathcal{N}(A - 1\,I) = \mathcal{N}(A - I)$. Aplicando o método de Gauss,

$$\left[\, A - I \mid \vec{0} \,\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \to \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \text{ e portanto,}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(A - I) &= \{(x_1, x_2, x_3) : x_2 = 0, x_1, x_3 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x_1, 0, x_3) : x_1, x_3 \in \mathbb{R}\} = \big\langle (1,0,0), (0,0,1) \big\rangle. \end{aligned}$$

- Logo $E(1) = \langle (1,0,0), (0,0,1) \rangle$. Uma base para $E(1)$ é portanto $\{(1,0,0), (0,0,1)\}$, tendo-se $m.g.(1) = \dim E(1) = 2$.
- Os vetores próprios de A associados ao valor próprio $\lambda = 1$ são os vetores não nulos de $E(1)$. Por exemplo, tomando $x_1 = 1$ e $x_3 = -2$ obtém-se o vetor próprio $(1,0,2)$ de A associado ao valor próprio $\lambda = 1$.
- Geometricamente $E(1)$ define o plano de $\mathbb{R}^3$ que passa na origem com vetores diretores $(1,0,0)$ e $(0,0,1)$.

Exemplo (cont.)

Relativamente ao subespaço próprio $E(2) = \mathcal{N}(A - 2I)$ tem-se:

- $A - 2I = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.
- Aplicando o método de Gauss ao sistema $\left[\, A - 2I \mid \vec{0} \,\right]$ obtém-se,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \to \cdots \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

- Logo, $E(2) = \mathcal{N}(A - 2I) = \{(x_3, x_3, x_3) : x_3 \in \mathbb{R}\} = \big\langle (1,1,1) \big\rangle$.
- Uma base para $E(2)$ é portanto $\{(1,1,1)\}$, tendo-se $m.g.(2) = \dim E(2) = 1$.
- Os vetores próprios de A associados ao valor próprio $\lambda = 2$ são portanto os vetores da reta que passa na origem com vetor diretor $(1,1,1)$, com excepção da origem.
- A informação, dita espectral sobre a matriz A pode ser organizada numa tabela

λ	$m.a.(\lambda)$	$m.g.(\lambda)$	base de $E(\lambda)$
1	2	2	$\{(1,0,0), (0,0,1\}$
2	1	1	$\{(1,1,1)\}$