Só para relembrar :)

Resumo

- Reconhecer / verificar que $v \neq \vec{0}$ é vetor próprio de A
  $\longrightarrow$ Mostrar que $Av = \lambda v$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$.
  λ é o valor próprio associado a v.
- Reconhecer / verificar que α é valor próprio de A
  $\longrightarrow$ Mostrar que $\det(A - \alpha I) = 0$.
- Determinar os valores próprios de A
  $\longrightarrow$ Determinar as raízes (reais e complexas) de $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$.
  A multiplicidade algébrica de cada valor próprio λ, m.a.(λ), é o número de vezes que λ aparece repetido como raíz na factorização do polinómio característico $p_A(\lambda)$.
- Determinar os vetores próprios de A associados ao valor próprio λ
  $\longrightarrow$ Determinar os vetores não nulos de $E(\lambda) = \mathcal{N}(A - \lambda I)$.
  A multiplicidade geométrica de λ é m.g.$(\lambda) = \dim E(\lambda)$.

Propriedades dos valores próprios

Proposição

Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Então:

- Para todo o valor próprio λ de A tem-se

$$\boxed{1 \leq m.g.(\lambda) \leq m.a.(\lambda)}$$

- A matriz A possui n valores próprios (reais e/ou complexos) contando com repetições, ou seja, a soma das multiplicidades algébricas dos valores próprios distintos de A é igual à ordem da matriz A.
- A soma dos valores próprios de A, contando com repetições (m.a.), é igual ao traço de A, $tr(A)$, que se define como a soma dos elementos da diagonal principal de A.
- O produto dos valores próprios de A, contando com repetições (m.a.), é igual ao $\det A$.
- $\lambda = 0$ é valor próprio de A se e só se A é não invertível.

Propriedades dos valores próprios - exemplo 1

Consideremos a matriz D do exercício 29.3 e a respectiva informação espectral,

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

λ	$m.a.(\lambda)$	$m.g.(\lambda)$	base de $E(\lambda)$
1	2	1	$\{(1,0,0)\}$
6	1	1	$\{(1,5,10)\}$

(ver as soluções da sebenta de exercícios). Constata-se que D possui 2 valores próprios distintos $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 6$, tais que:

- $1 = m.g.(1) \leq m.a.(1) = 2$
  $1 = m.g.(6) \leq m.a.(6) = 1$.
- $m.a.(1) + m.a.(6) = 2 + 1 = 3 = n$ (ordem da matriz D).
- A soma dos valores próprios de D contando com repetições (m.a.), $1 + 1 + 6 = 8$, coincide com o traço de D, $tr(D) = 1 + 2 + 5 = 8$ (soma das entradas da diagonal principal, a vermelho na matriz).
- O produto dos valores próprios de D, contando com repetições (m.a.), $1 \times 1 \times 6$ coincide com $det(D) = 6$ (verifique).
- Como $\lambda = 0$ não é valor próprio a matriz D é invertível.

Exemplo 2

Consideremos a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 0 & 4 & 6 \\ 1 & 8 & 1 \end{bmatrix}$. Tem-se:

- $v = (1,1,1)$ é vetor próprio de A associado ao valor próprio $\lambda = 10$. De facto,

$$Av = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 0 & 4 & 6 \\ 1 & 8 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix} = 10 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 10v.$$

- $\lambda = 2$ é valor próprio de A. De facto, $\det(A - 2I) = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 6 \\ 1 & 8 & -1 \end{vmatrix} = 0$,
  uma vez que $A - 2I$ que possui a primeira e segunda linhas múltiplas entre si.
- Logo A possui os valores próprios $\lambda_1 = 10$ e $\lambda_2 = 2$. Uma vez que A é uma matriz de ordem 3, A possui um terceiro valor próprio λ_3 (que pode ser repetido). Como a soma dos valores próprios de A é igual ao traço de A, ou seja, é igual à soma dos elementos da diagonal principal de A, tem-se

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 2 + 4 + 1 = 7,$$

  e portanto $\lambda_3 = 7 - \lambda_1 - \lambda_2 = 7 - (10 + 2) = -5$.
- Logo A admite valores próprios distintos $\lambda_1 = 10$, $\lambda_2 = 2$ e $\lambda_3 = -5$. Como A tem ordem 3, não podem existir mais valores próprios. Logo os 3 valores próprios têm multiplicidade algébrica um, uma vez que não há valores próprios repetidos.
- Logo $m.g.(10) = m.g.(2) = m.g.(-5) = 1$ uma vez que $1 \leq m.g. \leq m.a.$

Exemplo 2 (cont.)

- Vamos reobter os valores próprios de A calculando as raízes do polinómio característico $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$.
- Aplicando a regra de Laplace ao longo da 1ª coluna da matriz $A - \lambda I$ obtém-se,

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 6 \\ 0 & 4-\lambda & 6 \\ 1 & 8 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (2-\lambda)(-1)^{1+1}\big((4-\lambda)(1-\lambda) - 48\big) + 0 + 1(-1)^{3+1}(12 - 6(4-\lambda)) \\ &= (2-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda - 44) - 12 + 6\lambda = (2-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda - 44) - 6(2-\lambda) \\ &= (2-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda - 50) = (2-\lambda)(\lambda - 10)(\lambda + 5). \end{aligned}$$

- Na relação $\lambda^2 - 5\lambda - 50 = (\lambda - 10)(\lambda + 5)$ da última igualdade usou-se a fórmula resolvente para determinar as raízes de $\lambda^2 - 5\lambda - 50$([17]).
- Conclui-se novamente que A admite 3 valores próprios distintos, $\lambda_1 = 10$, $\lambda_2 = 2$ e $\lambda_3 = -5$, todos com multiplicidade algébrica um, porque na factorização de $p_A(\lambda)$ não há raízes repetidas.

[17] Se $p(x) = ax^2 + bx + c$ admite raízes α e β então pode factorizar-se como $p(x) = a(x - \alpha)(x - \beta)$.

Valores próprios e independência linear

Sejam v_1 e v_2 vetores próprios colineares de A associados a valores próprios λ_1 e λ_2, isto é $v_2 = \alpha v_1$ com $\alpha \neq 0$, tais que $Av_1 = \lambda_1 v_1$ e $Av_2 = \lambda v_2$. Ora, podemos obter Av_2 de duas formas distintas:

$$Av_2 = \lambda_2 v_2 \quad \text{e} \quad Av_2 = A(\alpha v_1) = \alpha A v_1 = \alpha \lambda_1 v_1 = \lambda_1(\alpha v_1) = \lambda_1 v_2.$$

Logo $\lambda_2 v_2 = \lambda_1 v_2$, ou seja, $(\lambda_2 - \lambda_1)v_2 = \vec{0}$. Como $v_2 \neq \vec{0}$, tem-se $\lambda_2 = \lambda_1$.

Logo se dois 2 vetores próprios estão associados a valores próprios distintos então não podem ser colineares e portanto definem um conjunto linearmente independente. Mais geralmente tem-se o seguinte resultado.

Teorema

Sejam A matriz de ordem n e $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ k valores próprios distintos de A. Tem-se:

- Um conjunto $\{v_1, \ldots, v_k\}$ formado por k vetores próprios de A associados aos k valores próprios distintos $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ ($Av_i = \lambda_i v_i$, $i = 1, \ldots, k$), é linearmente independente.
- Mais geralmente, um conjunto obtido reunindo bases dos k subespaços próprios $E(\lambda_1), \ldots, E(\lambda_k)$ define um conjunto linearmente independente de $\mathbb{R}^n$, que contém $m.g.(\lambda_1) + \cdots + m.g(\lambda_k)$ vetores próprios de A.

Bases próprias de $\mathbb{R}^n$ associadas a uma matriz

Como consequência do teorema do slide anterior tem-se o seguinte.

Critérios para a existência de bases próprias de $\mathbb{R}^n$

Sejam A matriz de ordem n e $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ os valores próprios distintos de A.

- Se $k = n$, isto é, se A admite n valores próprios distintos, então qualquer conjunto formado por n vetores próprios de A associados aos n valores distintos de A define uma base de $\mathbb{R}^n$ formada por vetores próprios de A.
- Se $k < n$ então existe uma base de $\mathbb{R}^n$ formada por vetores próprios de A, (obtida reunindo bases dos subesp. próprios $E(\lambda_1),\dots, E(\lambda_k)$) se e só se

$$\dim E(\lambda_1) + \cdots + \dim E(\lambda_k) = m.g.(\lambda_1) + \cdots + m.g.(\lambda_k) = n.$$

Critério alternativo para a existência de bases próprias de $\mathbb{R}^n$

Como $m.a.(\lambda_1) + \cdots + m.a.(\lambda_k) = n$ e $m.g.(\lambda_i) \leq m.a.(\lambda_i)$ para todo o i, a condição anterior $m.g.(\lambda_1) + \cdots + m.g.(\lambda_k) = n$ é equivalente à condição,

$$m.g.(\lambda_i) = m.a.(\lambda_i), \qquad i = 1, \dots, k.$$

Bases próprias de $\mathbb{R}^n$ associadas a uma matriz - exemplos

- Consideremos novamente a matriz do slide 170 e a respectiva informação espectral (ver o slide 174),

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

λ	$m.a.(\lambda)$	$m.g.(\lambda)$	base de $E(\lambda)$
1	2	2	$\{(1,0,0),(0,0,1)\}$
2	1	1	$\{(1,1,1)\}$

Os valores próprios distintos de A, são portanto $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 2$, tendo-se $m.g.(1) = m.a.(1) = 2$ e $m.g.(2) = m.a.(2) = 1$. Logo existe uma base de $\mathbb{R}^3$ formada por vetores próprios de A, que é obtida reunindo bases dos subespaços próprios $E(1)$ e $E(2)$, como por exemplo, a base própria

$$\{(1,0,0),(0,0,1),(1,1,1)\}.$$

- Como a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 0 & 4 & 6 \\ 1 & 8 & 1 \end{bmatrix}$ do slide 181 é uma matriz de ordem 3 que admite 3 valores próprios distintos ($\lambda_1 = -5$, $\lambda_2 = 5$ e $\lambda_3 = 10$), obtém-se uma base de $\mathbb{R}^3$ formada por 3 vetores próprios de A considerando 3 vetores próprios associados a estes 3 valores próprios. Deixa-se como exercício indicar tal base.
- A matriz $D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ do exercício 29.3 possui 2 valores próprios distintos, $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 6$, tendo-se $m.g.(1) = 1 < m.a.(1) = 2$ como vimos slide 180. Como $m.g.(1) \neq m.a.(1)$, não existe uma base de $\mathbb{R}^3$ formada por vetores próprios de D. Note-se que neste caso $m.g.(1) + m.g(6) = 1 + 1 = 2 < 3 = n$.