Bases próprias e diagonalização de matrizes

- Seja A uma matriz quadrada de ordem n.
- Dadas matrizes $P = [\, v_1 \quad \cdots \quad v_n \,]$ invertível e $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ diagonal, tem-se

$$\begin{aligned} AP &= A[\, v_1 \quad v_2 \quad \cdots \quad v_n \,] = [\, Av_1 \quad Av_2 \quad \cdots \quad Av_n \,], \\ PD &= [\, v_1 \quad v_2 \quad \cdots \quad v_n \,] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} = [\, \lambda_1 v_1 \quad \lambda_2 v_2 \quad \cdots \quad \lambda_n v_n \,]. \end{aligned}$$

- Logo $AP = PD$ se só se $Av_i = \lambda_i v_i$, $i = 1, \ldots, n$, isto é, se e só se $\{v_1, \ldots, v_n\}$ for uma base de $\mathbb{R}^n$ formada por vetores próprios de A associados aos valores próprios $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.
- Multiplicando ambos os membros à esquerda por P^{-1}, obtém-se

$$AP = PD \quad \Leftrightarrow \quad P^{-1}AP = P^{-1}PD \quad \Leftrightarrow \quad P^{-1}AP = D,$$

dizendo-se então que A é diagonalizável, como veremos a seguir...

Diagonalização de matrizes

Definição de matriz diagonalizável

Uma matriz A de ordem n diz-se diagonalizável se existir uma matriz invertível P e uma matriz diagonal D tal que $P^{-1}AP = D$.

A matriz P designa-se por matriz de diagonalização para A.

Pelas considerações do slide anterior tem-se o seguinte.

Teorema

Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Tem-se:

1. A é diagonalizável se e só se existe uma base de $\mathbb{R}^n$ formada por vetores próprios de A.
2. Se $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é uma base de $\mathbb{R}^n$ formada por vetores próprios de A então a matriz desta base própria $P = [\, v_1 \quad \cdots \quad v_n \,]$ é uma matriz de diagonalização para A tendo-se,

$$P^{-1}AP = D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n),$$

onde $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ são os valores próprios (possivelmente repetidos) associados aos vetores próprios $v_1, \ldots, v_n$, respectivamente.

Exemplo do slide 170 revisitado

- Consideremos a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ do slide 170 cujos valores próprios distintos são $\lambda = 1$ e $\lambda = 2$ com $m.a.(1) = 2$ e $m.a.(2) = 1$.
- Vimos no slide 185 que $\{u_1, u_2, u_3\} = \{(1,0,0,), (0,0,1), (1,1,1)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$ formada por vetores próprios de A, obtida reunindo a base $\{(1,0,0), (0,0,1)\}$ de $E(1)$ com a base $\{(1,1,1)\}$ de $E(2)$.
- Então a matriz desta base própria, $P = [\, u_1 \;\; u_2 \;\; u_3 \,] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ é uma matriz de diagonalização para A.
- De facto, calculando a inversa de P tem-se (verifique)

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Exemplo do slide 180 revisitado

- Consideremos novamente a matriz $D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ do slide 180 cujos valores próprios distintos são $\lambda = 1$ e $\lambda = 6$, tendo-se $m.a.(1) = 2 > m.g.(1) = 1$ e $m.a.(6) = m.g.(6) = 1$.
- Como $m.g.(1) \neq m.a.(1)$ não existe uma base de $\mathbb{R}^3$ formada por vetores próprios de D e portanto D não é diagonalizável.
- Note-se que a cardinalidade (número de vetores) máxima de um conjunto linearmente independente formado por vetores próprios de D é $m.g.(1) + m.g.(6) = 2 < 3 = \dim \mathbb{R}^3$.

Reconstrução de matrizes diagonalizáveis

Observações

- A partir da informação sobre os valores e vetores próprios (informação espectral) de uma matriz diagonalizável podemos reconstruir essa matriz.
- Mais precisamente, se $P = [\, v_1 \ \cdots \ v_n \,]$ é a matriz de uma base de $\mathbb{R}^n$ formada por vetores próprios de uma matriz diagonalizável A e $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ é a matriz diagonal que contém os correspondentes valores próprios ($Av_i = \lambda_i v_i$, $i = 1, \ldots, n$), então

$$\begin{aligned} P^{-1}AP = D \quad &\Leftrightarrow \quad P(P^{-1}AP)P^{-1} = PDP^{-1} \\ &\Leftrightarrow \quad (PP^{-1})A(PP^{-1}) = PDP^{-1} \\ &\Leftrightarrow \quad A = PDP^{-1} \end{aligned}$$

- Logo a matriz diagonalizável A pode ser reobtida a partir das matrizes P, formada por vetores próprios de A, e D matriz diagonal que contém os respectivos valores próprios, isto é, a partir da informação espectral de A.
- Notemos que se trocarmos a ordem dos vetores próprios na matriz de diagonalização P temos que trocar a ordem dos correspondentes valores próprios na matriz diagonal D.

Reconstrução de matrizes diagonalizáveis

Exercício na aula

Determinar a matriz A a partir da informação espectral dada na seguinte tabela

λ	$m.a.(\lambda)$	$m.g.(\lambda)$	base de $E(\lambda)$
-3	2	2	$\{(0,1,0),(1,1,-1)\}$
2	1	1	$\{(1,-1,0)\}$

Resolução:

- A é diagonalizável pois $m.g(-3) = m.a.(-3)$ e $m.g(2) = m.a.(2)$.
- Reunindo as bases dos subespaços próprios de $E(-3)$ e $E(2)$ dadas na tabela, obtém-se a base de $\mathbb{R}^3$ formada por vetores próprios de A,

$$\{v_1, v_2, v_3\} = \{\underbrace{(0,1,0), (1,1,-1)}_{\text{base de } E(-3)}, \underbrace{(1,-1,0)}_{\text{base de } E(2)}\},$$

  associados aos valores próprios $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = -3$ e $\lambda_3 = 2$, respectivamente.
- Definindo $P = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$ e $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ e calculando P^{-1} obtém-se por fim matriz $A = PDP^{-1}$, isto é,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ -5 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

Aplicação: cálculo de potências de matrizes diagonalizáveis

- Seja A uma matriz diagonalizável de ordem n e P matriz de diagonalização para A, tal que
$$P^{-1}AP = D = \text{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n).$$
A partir da relação anterior obtém-se $A = PDP^{-1}$ (ver o slide 190) e portanto
$$\begin{aligned} A^\ell &= (PDP^{-1})^\ell = \underbrace{(PDP^{-1})(PDP^{-1})(PDP^{-1})\cdots(PDP^{-1})}_{\ell \text{ vezes}} \\ &= PD\underbrace{(P^{-1}P)}_{I_n}D\underbrace{(P^{-1}P)}_{I_n}D\cdots D\underbrace{(P^{-1}P)}_{I_n}DP^{-1} \\ &= PD^\ell P^{-1}. \end{aligned}$$

- Atendendo a que a potência de matrizes diagonais vem dada simplesmente por,
$$D^\ell = (\text{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n))^\ell = \text{diag}(\lambda_1^\ell, \ldots, \lambda_n^\ell),$$
obtém-se finalmente
$$A^\ell = P\,\text{diag}(\lambda_1^\ell, \ldots, \lambda_n^\ell)\,P^{-1}.$$

Potências de matrizes diagonalizáveis - exercício

Exercício na aula

Determinar uma matriz de diagonalização P para
$$A = \begin{bmatrix} 11 & 6 \\ -18 & -10 \end{bmatrix}$$
e aplicar os cálculos descritos no slide anterior para calcular A^{10}.

Resolução: Calculando os valores próprios de A e os respectivos subespaços próprios obtém-se a matriz de diagonalização $P = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ associada à matriz diagonal $D = \text{diag}(2, -1)$ (verifique). A matriz inversa de P é (ver a mnemónica do slide 144),
$$P^{-1} = \frac{1}{-4+3}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$
Tem-se então $D^{10} = \left(\text{diag}(2, -1)\right)^{10} = \text{diag}\left(2^{10}, (-1)^{10}\right) = \text{diag}(1024, 1)$, e portanto
$$\begin{aligned} A^{10} = PD^{10}P^{-1} &= \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1024 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4093 & 2046 \\ -6138 & -3068 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$