Introdução à Programação Linear

Problema 1

Uma exploração agrícola dispõe de 80 ha de terreno para produzir tomate e trigo. Para além do terreno, os recursos susceptíveis de limitar a produção das duas culturas são a água e a mão de obra: sabe-se que **cada hectare de tomate** necessita de 8000 m^3 de água e de 40 h de mão de obra e que **cada hectare de trigo** requer apenas 20 h de mão de obra. A exploração agrícola dispõe de 320000 m^3 de água e 2000 horas de mão de obra. As receitas, por cada hectare de tomate e trigo cultivados são, respetivamente, 300 € e 200 €. Pretende-se determinar a **área a destinar a cada cultura** por forma a maximizar a receita total.

Dados do problema:

	Utilização de recursos		
	Água	Mão de obra	Receita
Tomate	8000 m^3/ha	40 h/ha	300 €/ha
Trigo		20 h/ha	200 €/ha
Disponibilidades	$\leq$ 320000 m^3	$\leq$ 2000 h	max
Terreno	$\leq$ 80 ha		

Construção do modelo matemático

Variáveis de decisão

Vamos considerar duas variáveis, x e y, que representam as áreas (em hectares) a destinar ao cultivo do tomate e do trigo, respetivamente.

Função objetivo

A função objetivo (f.o.) traduz a relação entre o valor da receita total (em €) e as receitas obtidas pelo cultivo de x hectares de tomate e y hectares de trigo:

$$z = 300\,x + 200\,y.$$

Restrições funcionais

As restrições funcionais traduzem as limitações dos recursos disponíveis:

- A área total de **terreno** cultivado não pode exceder 80 ha $\longrightarrow$ $x + y \leq 80.$
- O consumo de **água** não pode exceder 320000 m^3 $\longrightarrow$ $8000\,x \leq 320000.$
- A **mão de obra** utilizada não pode exceder 2000 h $\longrightarrow$ $40\,x + 20\,y \leq 2000.$

Restrições de sinal

Pela sua natureza as variáveis não podem tomar valores negativos $\longrightarrow$ $x, y \geq 0.$

Formulação do Problema 1 em PL

O Problema 1 pode então ser formulado em PL como,

$$\begin{array}{lrcll} \max & z = 300\,x + 200\,y & & & \\ \text{s.a} & x + \,y & \leq & 80 & (T) \\ & 8000\,x & \leq & 320000 & (A) \\ & 40\,x + 20\,y & \leq & 2000 & (MO) \\ & x, y & \geq & 0 & \end{array}$$

em que

- x = área (em ha) destinada à cultura de tomate,
- y = área (em ha) destinada à cultura de trigo.

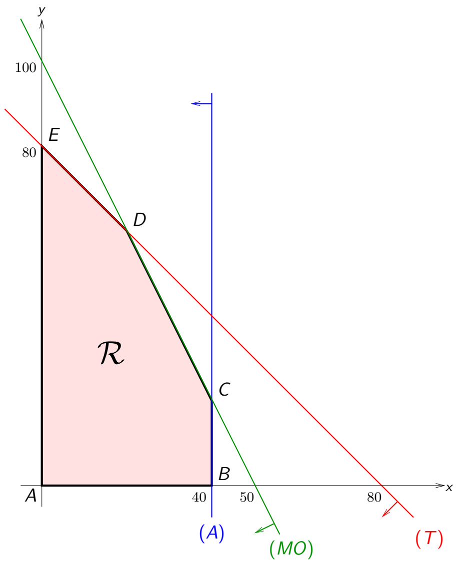
Repare-se que apesar da cultura de trigo não necessitar de água e requerer menos horas de mão de obra que a cultura de tomate, também gera menos receita, pelo que não é óbvia qual a área a destinar a cada uma das culturas de modo a maximizar a receita.

Solução e região admissível de um problema em PL

- A região admissível de um problema em PL é o conjunto das suas soluções admissíveis, isto é, o conjunto das soluções que satisfazem todas as restrições funcionais e de sinal.
- Dividindo a segunda restrição da formulação do Problema 1 por 8000 e a terceira por 20 (ver o slide 196), obtêm-se restrições lineares mais simples, passando a região admissível $\mathcal{R}$ do Problema 1 a ser definida por:

$$\begin{array}{rcl} x + y & \leq & 80 \\ x & \leq & 40 \\ 2x + y & \leq & 100 \\ x, y & \geq & 0 \end{array}$$

Região admissível do problema em PL



- A inequação linear $x + y \leq 80$ define o semi-plano (assinalado por meio de $\rightarrow$) que contém a origem (porque $0 + 0 \leq 80$) e cuja fronteira é a reta de suporte (a vermelho) de equação $x + y = 80$. Se $y = 0$ nesta equação, obtém-se $x = 80$ e se $x = 0$ então $y = 80$, concluindo-se que a reta de suporte intersecta os eixos coordenados nos pontos $(80, 0)$ e $(0, 80)$.
- A inequação $x \leq 40$ define o semi-plano (assinalado por meio de $\rightarrow$) com fronteira dada pela reta suporte vertical $x = 40$ (a azul).
- A inequação $2x + y \leq 100$ define o semi-plano (assinalado por meio de $\rightarrow$), que contém a origem e cuja fronteira é a reta de suporte (a verde) de equação $2x + y = 100$, que intersecta os eixos coordenados em $(50, 0)$ e $(0, 100)$.

A região admissível $\mathcal{R}$ obtém-se intersectando os 3 semi-planos descritos acima com o primeiro quadrante definido pelas restrições de sinal $x, y \geq 0$, e define portanto o polígono $[ABCDE]$.

Conjuntos de nível da função objetivo

- Dado $k \in \mathbb{R}$ define-se o conjunto de nível k da função objectivo (f.o.) $z = 300\,x + 200\,y$, como

$$C_k = \big\{(x, y) \;:\; 300\,x + 200\,y = k\big\},$$

que representa o conjunto dos pontos do plano em que a f.o. toma o valor k. Os conjuntos C_k, $k \in \mathbb{R}$, definem retas paralelas entre si, uma vez que são todas perpendiculares ao mesmo vetor normal $(300, 200)$.
- O conjunto das soluções que geram uma dada receita k€ é a parte do conjunto de nível C_k contida na região admissível $\mathcal{R}$, ou seja,

$$\big\{(x, y) \in \mathcal{R} \;:\; 300\,x + 200\,y = k\big\},$$

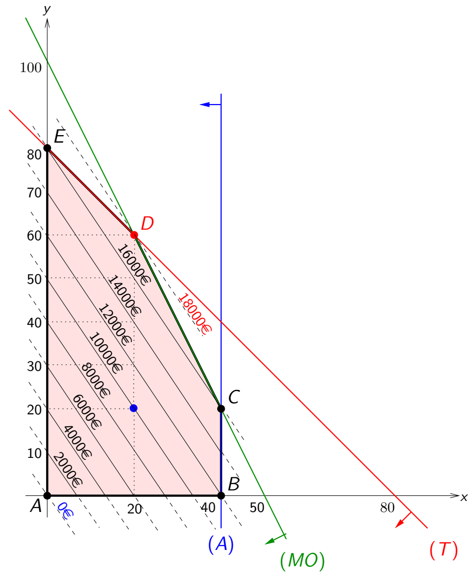
que pode obviamente ser vazia.
- Por exemplo, cultivar 20 hectares de tomate e 20 hectares de trigo corresponde à solução admissível $(20, 20) \in \mathcal{R}$ e gera uma receita de $k = 300x20 + 200x20 = 10000$€.
- O conjunto das soluções admissíveis que geram a mesma receita que a solução $(20, 20)$ é o conjunto

$$\big\{(x, y) \in \mathcal{R} \;:\; 300\,x + 200\,y = 10000\big\},$$

que corresponde à parte da reta de nível C_{10000} contida em $\mathcal{R}$.

Resolução gráfica do problema de PL

Representam-se na figura abaixo a solução admissível $(20, 20) \in \mathcal{R}$ e as retas de nível da f.o. para diferentes valores de receita k€, com a parte fora da região admissível a tracejado.



Torna-se evidente pela figura que o valor máximo da receita é atingido no vértice D, cujas coordenadas podem ser obtidas intersectando as retas de suporte $x + y = 80$ e $2x + y = 100$, isto é, como solução do sistema,

$$\begin{cases} x + y = 80 \\ 2x + y = 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 20 \\ y = 60 \end{cases}$$

O vértice $D = (20, 60)$ designa-se por solução ótima do problema de PL e corresponde a cultivar 20 hectares de tomate e 60 ha de trigo, originando uma receita máxima de 18000€.

A solução ótima $D = (20, 60)$ utiliza a totalidade da mão de obra e do terreno disponíveis, uma vez que está na interseção das retas de suporte das correspondentes restrições funcionais, ou seja, estas 2 restrições são satisfeitas com igualdade ($x + y = 20 + 60 = 80$ e $2x + y = 40 + 60 = 100$), dizendo-se que estão saturadas.

Vértices do polígono de admissibilidade e solução ótima

- Veremos mais adiante que se a região admissível $\mathcal{R}$ for não vazia e limitada, então pelo menos uma solução ótima do problema de PL ocorre num vértice do polígono de admissibilidade $\mathcal{R}$([18]), "bastando" por isso enumerar todos os seus vértices e determinar o(s) vértice(s), onde a função objectivo atinge o valor máximo (ou mínimo).
- As coordenadas de cada vértice da região admissível $\mathcal{R}$ do Problema 1 obtêm-se intersectando as retas de suporte que contêm o vértice. Por exemplo, as coordenadas do vértice C obtêm-se como

$$C: \quad \begin{cases} x = 40 \\ 2x + y = 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 40 \\ y = 20 \end{cases}$$

- Calculando o valor da função objectivo em cada vértice de $\mathcal{R}$ constata-se que o valor mais elevado ocorre no vértice D, concluindo-se novamente que uma solução ótima ocorre no vértice D:

vértice (x, y)	$z = 300x + 200y$
$A = (0, 0)$	0€
$B = (40, 0)$	12000€
$C = (40, 20)$	16000€
$D = (20, 60)$	18000€ (máx.)
$E = (0, 80)$	16000€

[18] Poliedro de admissibilidade caso existam mais que 2 variáveis de decisão.