INSTITUTO SUPERIOR DE AGRONOMIA

2ª Chamada do Exame de Álgebra Linear

22 de janeiro de 2024 - Duração: 2h30

Guarde todos os equipamentos eletrónicos, incluindo telemóveis e calculadoras, na mala/mochila fechada ou coloque-os na secretária do docente.
O incumprimento das regras leva à **anulação da prova**.

Apresente os cálculos que efetuar e justifique todas as respostas.

Número: Nome:

Cotação (não preencher)

1a)	1b)i	1b)ii	1b)iii	1c)i	1c)ii	2a)	2b)	2c)	2d)	3a)	3b)	3c)	4)	5a)	5b)	5c)	6	Total
1.75	0.75	0.75	0.75	1	1.5	1.25	1.5	1	1	1.5	1.25	0.75	1	1.5	0.5	0.75	1.5	20

[6.5v] **1.** Considere $A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -\alpha & 1 \end{bmatrix} = [\, u_1 \ u_2 \ u_3 \,]$ e $b = \begin{bmatrix} \beta \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

a) Discuta o sistema $Ax = b$ para todos os valores de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

b) Indique os valores de α e β para os quais:

i) Existe uma matriz B de ordem 3 tal que $AB = I$, em que I denota a matriz identidade.

ii) $\langle u_1, u_2, u_3, b \rangle \neq \mathbb{R}^3$.

iii) $(1, 1, 1) \in \mathcal{N}(A)$.

c) Considere $\alpha = 2$.

i) Escreva $(2, 2, -3)$ como combinação linear de u_1, u_2, u_3.

ii) Justifique que $\{(2, 0, 1), (2, 2, -3)\}$ é base de $\mathcal{C}(A)$.

[4.75v] **2.** Considere $U = \langle (1, -1, 0, 2), (2, -2, 1, 1) \rangle$ e $b = (1, 1, -1, 3)$.

a) Indique uma base ortogonal de U.

b) Calcule a $\text{proj}_U(b)$.

c) Indique o vetor de $U^\perp$ à menor distância de b e o valor dessa distância.

d) Indique um vetor $c \neq b$ tal que que $\text{proj}_U(c) = \text{proj}_U(b)$ e $d(c, U) = d(b, U)$.

v.s.f.f.

[3.5v] **3.** Considere $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

a) Determine os valores próprios de A e indique as respetivas multiplicidades algébricas.

b) Determine um subespaço próprio de A e interprete-o geometricamente.

c) Averigue se existe uma base de $\mathbb{R}^3$ formada por vetores próprios de A.

[1v] **4.** A entidade gestora de um parque natural pretende proteger três *habitats*, A, B e C. Cada hora de trabalho destinada à proteção de A, B e C tem um custo de 2 €, 3 € e 2 €, respetivamente, sendo o orçamento semanal disponível para a proteção destes *habitats* de 100 €. O tempo gasto semanalmente na proteção do *habitat* A não deve ser inferior a 10 horas e o tempo despendido com os *habitats* B e C, em conjunto, não deve ultrapassar 25 horas. Cada hora de trabalho destinada aos *habitats* A, B, C permite proteger 4 ha, 3.5 ha e 1 ha de área, respectivamente. Pretende-se determinar o número de horas de trabalho a destinar semanalmente a cada *habitat* de modo a maximizar a área protegida total.

Formule o problema em termos de programação linear atribuindo significado às variáveis.

[2.75v] **5.** Considere o seguinte problema de programação linear

$$\begin{array}{lrcl} \min & z = 2x_1 + 2x_2 & & \\ \text{s.a} & x_1 + x_2 & \geq & 2 \\ & x_1 - x_2 & \geq & -1 \\ & 5x_1 + 3x_2 & \leq & 15 \\ & x_1, \quad x_2 & \geq & 0. \end{array}$$

a) Determine uma solução ótima do problema.

b) Escreva o problema na forma *standard*.

c) Indique uma solução básica admissível do problema na forma *standard*.

[1.5v] **6.** Prove que se A é uma matriz quadrada de ordem ímpar então $\mathcal{C}(A) \neq \mathcal{N}(A)$.