Exercícios sobre Fórmula de Taylor

1) Sejam $f(x) = \sqrt{1+x}$, $P_1(x)$ o polinómio de MacLaurin de f de ordem 1 e $R_1(x)$ o resto de Lagrange da fórmula de MacLaurin de f de ordem 1.

   a) Determine $P_1(x)$.

   b) Calcule um valor aproximado para $\sqrt{2}$, usando $P_1(x)$.

   c) Escreva a expressão de $R_1(x)$.

   d) Justifique que o erro cometido pela aproximação definida na alínea b) é inferior a $\frac{1}{8}$ e superior a $\frac{1}{8\sqrt{8}}$.

2) Considere a função $f(x) = \ln x$.

   a) Escreva a fórmula de Taylor de ordem 3 para f em $a = 1$.

   b) Calcule um valor aproximado para $\ln 1.3$.

   c) Justifique que o erro cometido pela aproximação definida na alínea anterior é inferior a $\frac{(0.3)^4}{4}$.

3) Considere a função $f(x) = x + \operatorname{arctg}(x)$.

   a) Escreva o polinómio de Taylor de ordem 1 de f em $a = 1$.

   b) Mostre que, para $x > 0$, o gráfico de f está abaixo da reta tangente à curva de f no ponto de abcissa 1.

4) Considere a função $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$. Sejam P_1 e P_2 os polinómios de Taylor de f de ordens 1 e 2 em $a = 1$, respetivamente,.

   a) Explicite $P_1(x)$ e $P_2(x)$.

   b) Mostre que $\quad P_1(x) < f(x) < P_2(x), \quad$ para $x > 1$.

5) Utilize a fórmula de MacLaurin da função g

$$g(x) = \frac{\ln(\cos x)}{1+x^2} = -\frac{x^2}{2} + \frac{5}{12}x^4 + R_4(x)$$

para determinar $g(0)$ e $g^{(n)}(0)$, $n = 1, \ldots, 4$, em que $g^{(n)}$ designa a derivada de ordem n de g.

6) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função, com terceira derivada, cujo polinómio de Taylor de ordem 2 em $a = -1$ é $P_2(x) = 3 + 5(x+1)^2$.

a) Determine $f(-1)$, $f'(-1)$ e $f''(-1)$.

b) Calcule um valor aproximado para $f(-1.1)$.

c) Indique o valor de $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{f(x) - P_2(x)}{(x+1)^2}$.

d) Considere $f'''(x) = 0$, para todo o $x \in \mathbb{R}$. Indique, justificando, o valor de $f(-1.1)$.

7) Utilize a fórmula de Taylor para escrever o polinómio $P(x) = (x-1)^3 + (x+1)^2$ como soma de potências de i) $(x+1)$ ii) x iii) $(x-1)$.

8) Seja $f(x) = \ln(x+1)$. Dê exemplo de dois polinómios $P(x)$ e $Q(x)$ tais que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - P(x)}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - Q(x)}{x^3} = 0$.

9) Utilize as fórmulas de MacLaurin de ordem adequada das funções $g(x)$ do exercício 5, $\sin x$ e $\cos x$, para calcular os seguintes limites

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{\sin x}$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{g(x)}{1 - \cos x}$

e) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{g(x)}{x^4}$

Soluções:

1) a) $P_1(x) = 1 + \frac{1}{2}x$ b) 1.5 c) $R_1(x) = -\dfrac{1}{8\sqrt{(1+c)^3}}x^2$ em que c está entre 0 e x

2) a) $\ln x = P_3(x) + R_3(x)$ em que $P_3(x) = x - 1 - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3$ e $R_3(x) = -\dfrac{1}{4c^4}(x-1)^4$ em que c está entre 1 e x b) 0.264

3) a) $P_1(x) = 1 + \frac{\pi}{4} + \frac{3}{2}(x-1)$

4) a) $P_1(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}(x-1)$, $P_2(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{4}(x-1)^2$

5) $g(0) = 0$, $g^{(1)}(0) = 0$, $g^{(2)}(0) = -1$, $g^{(3)}(0) = 0$, $g^{(4)}(0) = 10$

6) a) $f(-1) = 3$, $f'(-1) = 0$, $f''(-1) = 10$ b) 3.05 c) 0 d) 3.05

7) i) $P(x) = -8 + 12(x+1) - 5(x+1)^2 + (x+1)^3$ ii)$P(x) = 5x - 2x^2 + x^3$

iii) $P(x) = 4 + 4(x-1) + (x-1)^2 + (x-1)^3$

8) $P(x) = x - \frac{x^2}{2}$ e $Q(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$

9) a) 1 b) 1/2 c) 0 d) -1 e) $-\infty$