Análise Matemática

Introdução às equações diferenciais

Isabel Faria, Pedro C. Silva

Instituto Superior de Agronomia

- 2015 -

Nestes apontamentos expõe-se a parte relativa a Equações Diferenciais da Unidade Curricular *Análise Matemática*, do 1º ano das licenciaturas em Engenharia e em Biologia, do Instituto Superior de Agronomia.

Agradecemos a colaboração das colegas Ana Isabel Mesquita e Isabel Martins.

Isabel Faria, Pedro C. Silva

Conteúdo

Capítulo 1

Equações diferenciais

As equações diferenciais são frequentemente utilizadas em diversas áreas da Ciência, para traduzir situações que envolvem uma "quantidade" y a variar com o tempo (ou dependente de outras variáveis) sobre a qual temos informação sobre a respectiva *taxa de variação*, *taxa de crescimento*, *velocidade*, i.e., sobre a sua derivada.
Relembremos que se y é uma variável dependente da variável t, $y = y(t)$,

- **a taxa de variação média** no intervalo $[t, t + \Delta t]$ é

$$\frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t}.$$

- **a taxa de variação no instante** t é,

$$y'(t) = \frac{dy}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t}.$$

Por vezes é conveniente utilizar a

- **a taxa de variação relativa** que é

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{y}\frac{dy}{dt}.$$

Comecemos por ver alguns exemplos.

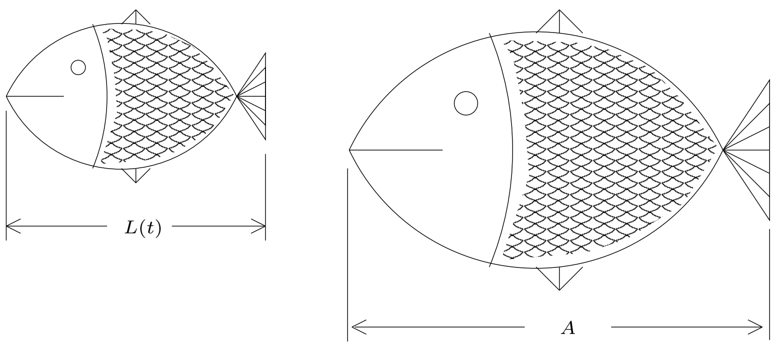
Exemplo 1 (Decaimento radioactivo)

A taxa de decaimento de massa de um elemento radioactivo num dado instante é proporcional à sua massa nesse instante. Designando por $m = m(t)$ a massa do elemento no instante t podemos exprimir esta propriedade através da equação,

$$\frac{dm}{dt} = -c\,m, \qquad c > 0.$$

Exemplo 2 (Modelo de von Bertalanffy)

Seja $L(t)$ o comprimento de um peixe no instante t e A o comprimento máximo que se espera que o peixa atinja.



A taxa de crescimento do peixe num dado instante t é proporcional ao comprimento que falta para atingir o comprimento máximo, o que se traduz pela equação diferencial

$$\frac{dL}{dt} = k(A - L), \qquad k > 0.$$

Uma **equação diferencial** é uma equação em que a incógnita é uma função (dependente de uma ou mais variáveis) e que envolve derivadas dessa função.

Se as funções apenas dependerem de uma única variável a equação diferencial diz-se **ordinária**. Se as funções dependerem de mais do que uma variável tem-se uma **equação às derivadas parciais**.

Chama-se **ordem** de uma equação diferencial à ordem da derivada de maior ordem que figura nessa equação.

EXEMPLO 3

1. $xy''' - 2y'' - 2y' = 4xy$ é uma equação diferencial ordinária de 3ª ordem.
2. $\dfrac{dy}{dt} - y = \sin t$ é uma equação diferencial ordinária de 1ª ordem.
3. $u''_{xx} + u''_{yy} = e^{x+y}$ é uma equação às derivadas parciais de segunda ordem.

Apenas iremos considerar equações diferenciais ordinárias.

Uma **solução** de uma equação diferencial de ordem n num dado intervalo é uma função com derivada até à ordem n nesse intervalo que verifica a equação.

EXEMPLO 4 A função $y = t^2 - 5t$ é **solução** em $\mathbb{R}$ da equação

$$ty' - y = t^2,$$

o que se verifica facilmente substituindo $y = t^2 - 5t$ e $y' = 2t - 5$ na equação.

Resolver uma equação diferencial é encontrar **todas** as funções que são solução dessa equação. Ao conjunto de todas as soluções de uma equação chama-se **solução geral da equação**.

Resolver um problema de valores iniciais de 1ª **ordem** é encontrar uma função $y(t)$ que satisfaça uma equação diferencial, e sobre a qual se conhece uma condição do tipo $y(t_0) = y_0$.

Equações diferenciais já nos apareceram quando estudámos primitivação.
De facto, determinar uma função que verifique

$$y' = f(t),$$

é resolver uma equação diferencial cujas soluções são

$$y = F(t) + k,$$

sendo $F = P\, f = \int f(x)dx$.

A constante k ficaria determinada se fosse conhecido o valor da solução nalgum instante t_0, isto é, se déssemos uma condição adicional do tipo $y(t_0) = y_0$. Nessa altura a solução única do problema de valores iniciais

$$\begin{cases} y' = f(t) \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

seria

$$y(t) = F(t) - F(t_0) + y_0.$$

Exemplo 5 Pretende-se determinar $y = y(t)$, $t \in \mathbb{R}$, tal que

$$\begin{cases} y' = \sin t \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

De $y' = \sin t$ temos $y = -\cos t + k$, $k \in \mathbb{R}$. A condição inicial permite determinar a constante k:

$$y(0) = -\cos 0 + k \quad \Leftrightarrow \quad k = 1.$$

Assim a solução (única) do problema é

$$y = -\cos t + 1, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

A resolução de uma equação diferencial arbitrária não é, em geral, possível. As equações diferenciais são agrupadas em classes e consoante a classe a que pertencem possuem os seus próprios métodos de resolução, ou então resolvem-se numericamente.

Vamos apenas considerar

- equações diferenciais **lineares de 1ª ordem**
- equações diferenciais com **variáveis separáveis**,

que permitem descrever uma grande variedade de problemas importantes, como veremos adiante.

1.1 Equações diferenciais lineares de primeira ordem

Comecemos por estudar as equações diferenciais lineares de 1ª ordem, que são equações que se resolvem por métodos simples.
Uma equação diferencial linear de 1ª ordem é uma equação da forma

$$y' + g(t)y = f(t),$$

sendo f e g funções contínuas definidas num dado intervalo I de $\mathbb{R}$.
Se $g(t) \equiv 0$, isto é, $g(t) = 0$, $\forall t \in I$, obtemos

$$y' = f(t), \qquad t \in I$$

e resolver a equação diferencial é resolver o problema de primitivação referido anteriormente.
Em geral a resolução da equação

$$y' + g(t)y \;=\; f(t),$$

reduz-se a um problema de primitivação. De facto, sendo $G(t) = \displaystyle\int g(t)\,dt$ e uma vez que $e^{G(t)} \neq 0$, multiplicando a equação por $e^{G(t)}$, obtemos

$$e^{G(t)}y' + e^{G(t)}g(t)y = e^{G(t)}f(t).$$

Uma vez que

$$\left[e^{G(t)}\right]' = G'(t)e^{G(t)} = g(t)e^{G(t)},$$

e o 1º membro da equação é a derivada de $e^{G(t)}y$, obtém-se

$$\left[e^{G(t)}\,y(t)\right]' = e^{G(t)}\,f(t),$$

e portanto

$$e^{G(t)}\,y(t) = \int e^{G(t)}\,f(t)\,dt + k,$$

sendo a solução geral da equação

$$y(t) = e^{-G(t)} \int e^{G(t)}\, f(t)\, dt + k\, e^{-G(t)}.$$

À função $e^{G(t)}$ chama-se o **factor integrante**.

Exemplo 6 Pretende-se determinar a solução geral da equação diferencial linear de primeira ordem,

$$ty' + (1+t)y = 2, \qquad t > 0,$$

Dividindo a equação anterior por t obtemos

$$y' + \underbrace{\frac{1+t}{t}}_{g(t)} y = \underbrace{\frac{2}{t}}_{f(t)}.$$

Sendo

$$G(t) = \int \frac{t+1}{t}\, dt = \int \left(1 + \frac{1}{t}\right) dt = t + \ln t,$$

o factor integrante é

$$e^{t+\log t} = t\, e^t,$$

sendo a solução a geral da equação

$$y(t) = \frac{2}{t} + k\frac{e^{-t}}{t}.$$

De facto

$$\begin{aligned}
y' + \frac{1+t}{t} y = \frac{2}{t} \quad &\Leftrightarrow \quad \left(te^t\, y\right)' = te^t\, \frac{2}{t} \\
&\Leftrightarrow \quad te^t\, y = \int 2\, e^t\, dt + k, \qquad k \in \mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow \quad te^t\, y = 2\, e^t + k, \qquad k \in \mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow \quad y = \frac{2}{t} + k\frac{e^{-t}}{t}, \qquad k \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Exemplo 7

A equação do Exemplo 1,

$$\frac{dm}{dt} = -c\,m, \qquad c > 0,$$

é uma equação linear de 1ª ordem

$$m' + c\,m = 0,$$

sendo o factor integrante e^{ct} e a solução geral

$$m = ke^{-ct}.$$

1.2 Equações com variáveis separáveis

Chamamos equação diferencial com **variáveis separáveis** a uma equação diferencial de primeira ordem que se pode escrever na forma

$$\frac{dy}{dt} = g(t)h(y),$$

com h e g funções contínuas definidas em intervalos de $\mathbb{R}$.

Podemos transformar a equação anterior em

$$f(y)\,dy = g(t)\,dt,$$

sendo

$$f(y) = \frac{1}{h(y)}.$$

Se h não se anular a solução geral da equação é dada implicitamente por

$$\int f(y)\,dy = \int g(t)\,dt + k. \quad ([1])$$

[1] Note que $y = y(t)$ e portanto $\left(\int f(y)dy\right)' = f(y(t))\,y'(t)$ e que $\left(\int g(t)dt + k\right)' = g(t)$.

Se h se anular num ponto y_0 a solução geral da equação, para além das soluções anteriores, inclui também a solução constante

$$y(t) = y_0, \qquad \forall t.$$

EXEMPLO 8 Consideremos a equação

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

Separando as variáveis obtemos

$$y\,dy = -x\,dx,$$

cuja solução é dada por

$$\int y\,dy = -\int x\,dx \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + k,$$

ou seja, pela equação

$$x^2 + y^2 = 2k. \quad (^2)$$

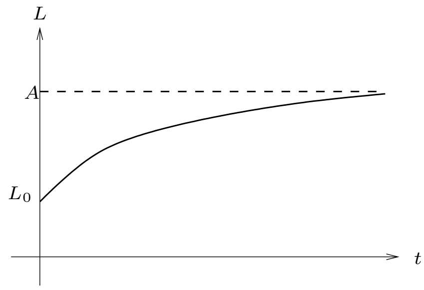
EXEMPLO 9 A equação diferencial do Exemplo 2 é uma equação de variáveis separáveis. Para além da solução constante $L(t) \equiv A$, temos as soluções dadas por

$$\begin{aligned} \frac{1}{A-L}dL = k\,dt \quad &\Leftrightarrow \quad \int \frac{1}{A-L}dL = k\int\,dt \\ &\Leftrightarrow \quad -\ln|A-L| = kt + k_1 \\ &\Leftrightarrow \quad A - L = \pm e^{-(kt+k_1)} \\ &\Leftrightarrow \quad L = A + k_2\,e^{-kt}, \end{aligned}$$

com $k_2 = \pm\, e^{-k_1}$ uma constante não nula (^{3}). Admitindo que o comprimento do peixe no instante $t = 0$ é $L_0 < A$ o gráfico da solução é

[2] Note que neste caso a solução da equação é uma função que não está definida explicitamente.

[3] Note que $k_2 > 0$ não tem significado biológico.



Assim no início de vida a taxa de crescimento é muito elevada, vindo a decrescer à medida que o tamanho do peixe aumenta. Um facto curioso é que o peixe cresce continuamente até à sua morte, sem nunca atingir o máximo esperado A.

Exemplo 10 Pretende-se determinar uma solução $y(t)$ do problema de valores iniciais

$$\begin{cases} y' = 5 + 4y, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Ora, para além da solução constante $y = -\dfrac{5}{4}$, tem-se

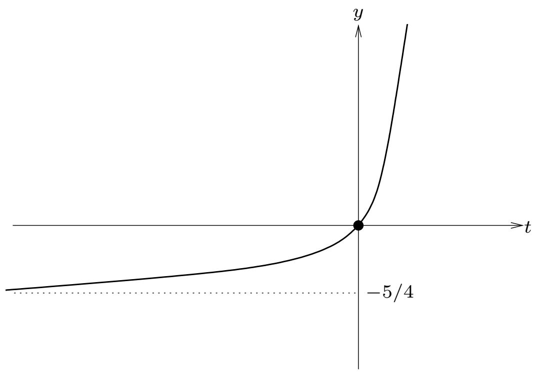
$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} = 5 + 4y \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{dy}{4y+5} = dt \\ &\Leftrightarrow \quad \int \frac{dy}{4y+5} = \int dt + k, \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{\ln|5+4y|}{4} = t + k, \\ &\Leftrightarrow \quad y = \frac{k_1 e^{4t} - 5}{4}, \end{aligned}$$

com $k_1 = \pm e^{4k}$. Para determinarmos a constante k_1 vamos utilizar a condição inicial

$$\begin{aligned} y(0) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{k_1 - 5}{4} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad k_1 = 5. \end{aligned}$$

Assim a solução do problema é

$$y(t) = \frac{5e^{4t} - 5}{4}.$$



1.3 Um exemplo de aplicação - a curva logística

A forma como o tamanho de uma população evolui ao longo do tempo tem sido, desde há muito, objecto de interesse e vários modelos têm sido propostos para descrever essa dinâmica.

O modelo **Malthusiano** (1789) estabelece que a taxa de variação do tamanho de uma população (por unidade de tempo) é proporcional ao respectivo tamanho, isto é,

$$N'(t) = rN(t),$$

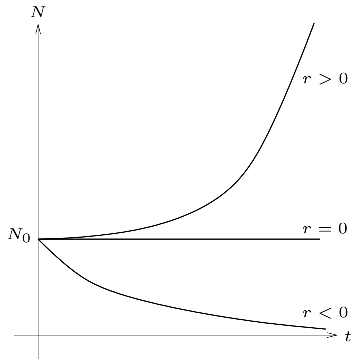
sendo $N(t)$ o tamanho da população no instante t e $r = b - d$ a diferença entre as taxas relativas de natalidade e mortalidade, supostas constantes. Por outras palavras, no modelo Malthusiano a taxa de crescimento relativa é constante de valor r, isto é,

$$\frac{1}{N}\frac{dN}{dt} = r.$$

A solução desta equação de variáveis separáveis é

$$N(t) = N_0 e^{rt},$$

sendo N_0 o tamanho da população no instante $t = 0$ o que significa que a população tem um crescimento exponencial.



Claro está que este modelo é, em muitos aspectos, bastante irrealista. Por exemplo, uma população não pode crescer indefinidamente, uma vez que necessitaria de recursos ilimitados para tal. São muitos os factores que concorrem para que a taxa de crescimento relativa não seja constante. Para além da limitação de recursos, temos também problemas derivados do superpovoamento, tais como competição dentro da mesma espécie e entre espécies, fenómenos migratórios, etc. Não obstante todas estas limitações, o modelo Malthusiano descreve com algum rigor algumas fases de desenvolvimento de muitas populações.

Nos modelos mais realistas do que o modelo Malthusiano à taxa de crescimento relativo r são acrescentadas taxas inibidores de crescimento, que normalmente se fazem sentir mais fortemente à medida que a população aumenta, ou seja,

$$\frac{1}{N}\frac{dN}{dt} = r - f(N),$$

para alguma função crescente f. No modelo **logístico** proposto por Verhulst (1836),

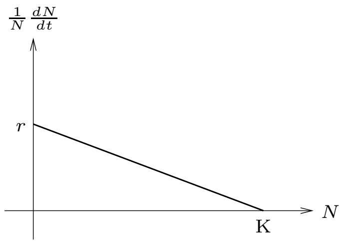
$$f(N) = r\frac{N}{K},$$

o que significa que a taxa de crescimento relativa decresce linearmente à medida que a população aumenta, tendo-se

$$\frac{1}{N}\frac{dN}{dt} \;=\; r\Big(1 - \frac{N}{K}\Big).$$

Neste modelo r designa-se usualmente por taxa de crescimento relativa **intrínseca** e K é uma constante positiva de valor elevado, designada por **capacidade de sustentação do**

meio. Esta constante representa o tamanho da população a partir do qual o crescimento se anula.



A equação é de novo uma equação com variáveis separáveis cujas soluções, para além de $N \equiv K$, são dadas por

$$\int \frac{d\,N}{N(K-N)} = \frac{r}{K}\int dt.$$

Atendendo a que

$$\frac{1}{N(K-N)} = \frac{1}{K}\left(\frac{1}{N}+\frac{1}{K-N}\right) = \frac{1}{K}\left(\frac{1}{N}-\frac{1}{N-K}\right),$$

tem-se

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{K}\left(\frac{1}{N}-\frac{1}{N-K}\right) dN = \frac{r}{K}\int dt \quad &\Leftrightarrow \quad \int\left(\frac{1}{N}-\frac{1}{N-K}\right) dN = r\int dt\\
&\Leftrightarrow \quad \ln|N| - \ln|N-K| = r\,t + C,\\
&\Leftrightarrow \quad \ln\left|\frac{N}{N-K}\right| = r\,t + C,\\
&\Leftrightarrow \quad \frac{N}{N-K} = \pm e^{r\,t}e^{C}.
\end{aligned}$$

Designando $D = \pm e^{C}$, obtem-se

$$\frac{N}{N-K} = D\,e^{r\,t}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{N}{N-K} = D\,e^{r\,t} \quad &\Leftrightarrow \quad N = D\,e^{r\,t}(N-K)\\
&\Leftrightarrow \quad N\left(1 - D\,e^{r\,t}\right) = -D\,K\,e^{r\,t}\\
&\Leftrightarrow \quad N = \frac{D\,K\,e^{r\,t}}{D\,e^{r\,t}-1}.
\end{aligned}$$

Podemos determinar D utilizando a condição inicial $N(0) = N_0$. Ora,

$$\frac{D\,K}{D-1} = N_0 \;\Leftrightarrow\; D\,K = N_0(D-1) \;\Leftrightarrow\; D\,(N_0 - K) = N_0 \;\Leftrightarrow\; D = \frac{N_0}{N_0 - K}.$$

Substituindo D na equação acima e simplificando obtem-se,

$$N(t) = \frac{N_0\,K\,e^{r\,t}}{N_0\,e^{r\,t} - (N_0 - K)}.$$

Dividindo o numerador e o denominador por $e^{r\,t}\,N_0$ obtemos a expressão,

$$N(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{N_0} - 1\right) e^{-r\,t}},$$

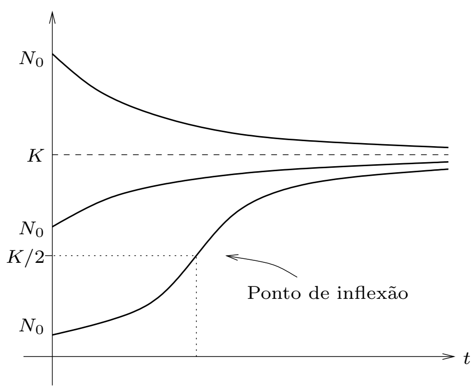
que usualmente se designa por *curva logística*.

Se $r = 0$, $N(t) = N_0$ para todo o t, ou seja, o tamanho da população mantém-se constante.

Se $r > 0$, a curva $N(t)$ tem uma assímptota horizontal $N = K$ uma vez que

$$\lim_{t\to+\infty} N(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{N_0} - 1\right) e^{-r\,t}} = K,$$

e portanto a população tende a longo prazo para a sua capacidade de sustentação do meio K. O ponto de inflexão ocorre quando a população atinge metade da capacidade de sustentação do meio.



Finalmente, se $r < 0$, o limite anterior é zero e a população tende para extinção.

Neste caso a curva logística foi utilizada para descrever o crescimento de uma população mas a família de curvas logísticas, cuja expressão geral é da forma

$$y(t) = \frac{a}{1 + b\, e^{c\,t}},$$

com a, b, c parâmetros não nulos, pode ser utilizada em contextos tão díspares como o aumento da biomassa de uma planta isolada, curvas de activação de correntes iónicas em células nervosas ou propagação de informação de uma comunidade.

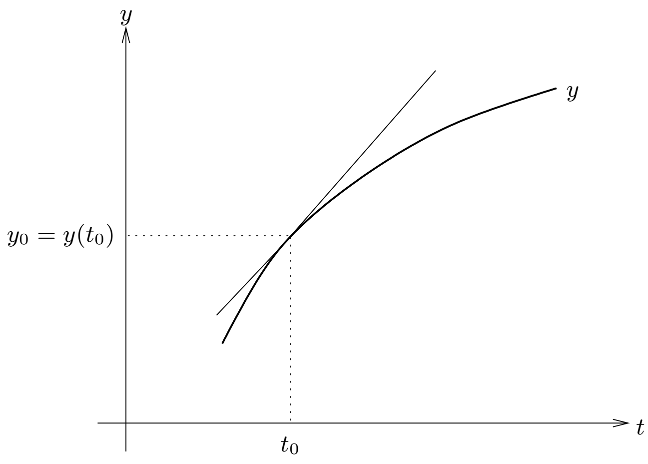
1.4 Resolução numérica de equações

Método de Euler

Como foi referido, na grande maioria dos casos, não é possível encontrar a expressão analítica da solução de uma equação diferencial. Torna-se assim necessário recorrer a métodos numéricos para calcular aproximações da solução.

Vamos referir apenas que o método de Euler que se baseia no facto de a recta tangente a uma curva num ponto ser, para pontos próximos, uma boa aproximação para a curva, isto é,

$$y(t) \simeq \underbrace{y(t_0) + y'(t_0)(t - t_0)}_{\text{polinómio de Taylor de ordem 1 de } y(t) \text{ em } t_0}$$



Consideremos o problema de valores iniciais

$$\begin{cases} y' = f(t, y), \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

Uma vez que $y' = f(t, y)$ tem-se,

$$y(t) \simeq y(t_0) + f(t_0, y_0)(t - t_0).$$

A partir do ponto t_0, para o qual conhecemos o valor de y, $y(t_0) = y_0$, o método de Euler calcula uma sucessão de valores aproximados y_1, y_2, y_3, ..., para os valores de y.
Assim se $t_1 = t_0 + h$, $y_1 = y_0 + f(t_0, y_0)\, h$, é um valor aproximado de $y(t_1)$.
Genericamente, se $t_k = t_{k-1} + h$,

$$y_k = y_{k-1} + f(t_{k-1}, y_{k-1})\, h,$$

é um valor aproximado de $y(t_k)$, para $k = 1, 2, 3, \dots, n$.
A h chama-se **passo**.

Exemplo 11 Consideremos o problema de valores iniciais,

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(t, y) = y\, t^2 - y, \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

cuja solução é $y = e^{\frac{t^3}{3} - t}$.
O método de Euler iria produzir, a partir de $t_0 = 0$ ($y_0 = y(t_0) = y(0) = 1$) e para $h = 0.5$,

$$y_1 = y_0 + f(t_0, y_0)\, h = 1 + f(0, 1)\, 0.5 = 0.5,$$

que é um valor aproximado para $y(t_1) = y(0.5)$

$$y_2 = y_1 + f(t_1, y_1)\, h = 0.5 + f(0.5, 0.5)\, 0.5 = 0.3125,$$

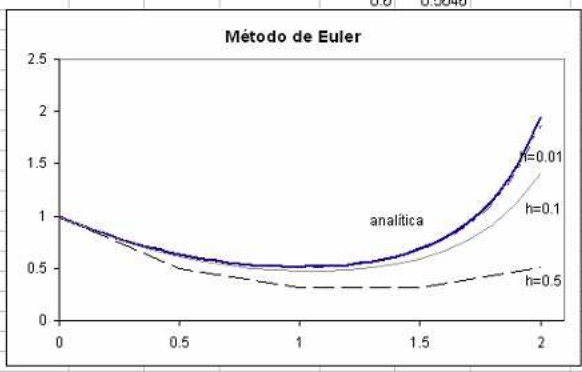
que é um valor aproximado para $y(t_2) = y(1)$

e assim sucessivamente

Na tabela que se segue, obtida com recurso a uma folha de cálculo, podem-se comparar os valores da solução da equação com os valores aproximados obtidos pelo método de Euler, usando diferentes passos.

$$y' = yt^2 - y$$

	t	analítica	t	h=0.5	t	h=0.1	t	h=0.01
5	0	=EXP(B5^3/3-B5)	0	1	0	1	0	1
6	0.05	0.9513	0.5	=F5+(F5*E5^2-F5)*0.5	0.1	=L5+(L5*K5^2-L5)*0.1	0.01	=O5+(O5*N5^2-O5)*0.01
7	0.1	0.9051	1	0.3125	0.2	0.8109	0.02	0.9801
8	0.15	0.8617	1.5	0.3125	0.3	0.7331	0.03	0.9703
9	0.2	0.8209	2	0.5078	0.4	0.6663	0.04	0.9606
10	0.25	0.7829			0.5	0.6104	0.05	0.9510
11	0.3	0.7475			0.6	0.5646	0.06	0.9415
12	0.35	0.7148					0.07	0.9322
13	0.4	0.6848					0.08	0.9229
14	0.45	0.6573					0.09	0.9137
15	0.5	0.6323					0.1	0.9046
16	0.55	0.6099					0.11	0.8957
17	0.6	0.5898					0.12	0.8868
18	0.65	0.5721					0.13	0.8781
19	0.7	0.5567					0.14	0.8695
20	0.75	0.5437					0.15	0.8609
21	0.8	0.5329					0.16	0.8525
22	0.85	0.5245					0.17	0.8442
23	0.9	0.5184					0.18	0.8360
24	0.95	0.5147					0.19	0.8279
25	1	0.5134					0.2	0.8199
26	1.05	0.5147					0.21	0.8121
27	1.1	0.5187					0.22	0.8043
28	1.15	0.5257					0.23	0.7967
29	1.2	0.5358					0.24	0.7891
30	1.25	0.5494					0.25	0.7817
31	1.3	0.5668					0.26	0.7744



1.5 Exercícios

1. Verifique que:

   (a) $y = xe^x$ é solução de $y'' - 2y' + y = 0$

   (b) $y = \sin x$ é solução de $y'' + 2y = \sin x$

   (c) $y = t \int\limits_0^t \sqrt{1+u^4}du$ é solução do problema de valores iniciais

$$\begin{cases} ty' - y = t^2\sqrt{1+t^4}, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

2. Determine uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de modo a que $f(0) = \frac{1}{3}$ e que a recta tangente ao seu gráfico em $(t, f(t))$ tenha declive $2\,t + 3\,f(t)$.

3. Indique a solução geral das seguintes equações:

   (a) $y' + \frac{3}{t}\,y = t,\ t > 0.$

   (b) $t\,y' - y = \frac{t^2}{2}\sin t,\ t > 0.$

   (c) $(t+1)y' = 2\,y - (1+t)^2,\ t > -1.$

   (d) $y' + t\,y = 3t$, em $\mathbb{R}$.

   (e) $5\,y' + y = 5e^t$, em $\mathbb{R}$

   (f) $y' = (t-4)e^{4t} + 2y$, em $\mathbb{R}$.

4. Resolva as equações diferenciais, explicitando as soluções sempre que possível:

   (a) $y' = 2(y-1).$

   (b) $y' = 2(y-1)y.$

   (c) $(1+x)y - (1-y)x\,y' = 0.$

   (d) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y}{x}.$

(e) $(1+t)y' - y = 0$, $t > -1$.

(f) $y' = \sec y$.

(g) $y' = \pi(1+y^2)$.

(h) $y' + y^2 = 1$.

(i) $\cos t \sin y \frac{dy}{dt} = \sin t \cos y$.

5. Resolva os seguintes problemas de valores iniciais:

(a) $\begin{cases} t^2y^2y' + 1 = y^3,\ t > 0 \\ y(1) = 2. \end{cases}$

(b) $\begin{cases} xy + e^{-x^2}(y^2-1)y' = 0, \\ y(0) = 1. \end{cases}$

6. Determine o tempo necessário para um lago perder 10% da sua massa de poluentes existente no início de um dado ano, admitindo que a taxa de decrescimento da concentração de poluentes no lago verifica a equação

$$\frac{dc}{dt} = -\frac{F}{V}c,$$

onde F designa o volume de água limpa que entra no lago por ano e V o volume do lago.

7. É sabido que para muitas substâncias medicamentosas administradas na corrente sanguínea, a taxa de decrescimento da *concentração* (i.e., da quantidade de substância por unidade de volume, usualmente em mg/l) é proporcional, em cada instante, à concentração. Seja α a constante de proporcionalidade.

(a) A administração da 1ª dose de uma dessas substâncias permite obter uma concentração na corrente sanguínea de 30 mg/l. Resolva o problema de valores iniciais que traduz a evolução da concentração dessa substância após a administração de uma dose.

(b) A referida substância apenas é eficaz se a sua concentração na corrente sanguínea for superior ou igual a 10 mg/l. Sabe-se que após 8 horas a seguir à administração da 1ª dose a substância deixa de ser eficaz e administra-se uma nova dose.

   i. Determine α.

   ii. Determine ao fim de quanto tempo deve ser administrada a 3ª dose por forma a manter a eficácia da substância.

8. Chama-se *tempo de semi-vida* de um elemento radioactivo ao tempo necessário para a sua massa se reduzir a metade. O Carbono 14 usado em datação de achados arqueológicos tem um tempo de semi-vida de 5730 anos. Determine a percentagem de Carbono 14 que se desintegra em 100 anos. Considere que a taxa de decaimento da massa de um elemento radioactivo num dado instante é proporcional à sua massa nesse instante.

9. Se o crescimento de uma planta isolada num dado período é exponencial, a biomassa $W(t)$ tem uma taxa de crescimento semanal relativa constante, igual a $\mu > 0$.

   (a) Estabeleça a equação diferencial que exprime o aumento de biomassa W.

   (b) Sabendo que a biomassa duplica em cada semana, calcule μ.

10. Os comprimentos de dois orgãos de um mesmo organismo verificam entre si uma relação *alométrica* se existir uma constante de proporcionalidade $K > 0$ entre as respectivas taxas de crescimento relativas (verificam relações alométricas os comprimentos do crâneo e da coluna vertebral dos juvenis de muitas espécies de vertebrados). Considere os orgãos A e B cujos comprimentos verificam entre si uma relação alométrica e sejam $L_A(t)$ e $L_B(t)$ os comprimentos de A e B no instante t, respectivamente.

(a) Sejam C_A e C_B os comprimentos dos orgãos A e B, respectivamente, no instante inicial. Indique o problema de valores iniciais que traduz a evolução dos comprimentos de A e B.

(b) Mostre que se L_A e L_B satisfazem a equação $L_A = \alpha\, L_B^k$, com $\alpha > 0$, então L_A e L_B verificam entre si uma relação alométrica.

11. Segundo uma lei de Newton, a taxa de arrefecimento de um objecto aquecido é proporcional, em cada instante t, à diferença entre a temperatura envolvente, suposta constante, e a temperatura desse objecto no instante t.

    (a) Estabeleça a equação diferencial que exprime a lei de arrefecimento segundo o modelo de Newton acima descrito.

    (b) Sabendo que um café à temperatura de 100^oC, demorou 10min a arrefecer para os 80^oC, numa sala a 20^oC, determine o tempo necessário para o café atingir os 50^oC.

12. A equação diferencial de Bernoulli tem a forma

$$\frac{dy}{dt} + u(t)y = v(t)y^\alpha.$$

    (a) Mostre que a mudança de variável $w = y^{1-\alpha}$, para $\alpha \neq 0$ e $\alpha \neq 1$, transforma esta equação numa equação diferencial linear de primeira ordem.

    (b) Utilizando a alínea anterior resolva a equação

$$\frac{dy}{dt} + ty = ty^2.$$

13. Pretende-se seguir a evolução do número de efectivos $N(t)$ de uma dada população. No instante inicial foram contabilizados 1×10^4 efectivos.

    (a) Indique o problema de valores iniciais que traduz a dinâmica desta população, admitindo que a respectiva taxa de crescimento *per capita*, r, se mantém constante ao longo do tempo.

(b) Sabendo que a população passou de 1×10^4 para 3.5×10^4 efectivos em 5 anos determine um valor aproximado (às duas casas decimais) para r.

(c) Ajuste o problema de valores iniciais anterior admitindo que a população segue um crescimento logístico com a capacidade de sustentação do meio 3×10^5.

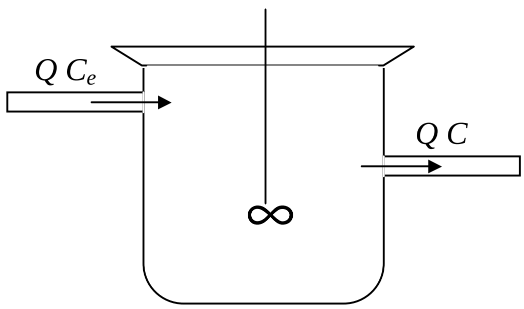
(d) Determine a lei de crescimento da população $N(t)$. O que sucede à população quando $t \to +\infty$?

14. Considere o problema $\dfrac{dy}{dt} = t - y$, com a condição inicial $y(-1) = 4$.

(a) Resolva o problema analiticamente e represente graficamente a solução para t entre -1 e 4.

(b) Resolva o problema numericamente, utilizando o método de Euler com passos 0.5, 0.25 e 0.1 e represente no mesmo gráfico da alínea anterior as soluções aproximadas. Compare os resultados obtidos.

15. Um tanque perfeitamente agitado é alimentado com uma corrente de caudal constante, Q. Esta consiste numa solução com concentração conhecida, C_e, num dado componente. O volume de líquido no tanque (V) é constante (o caudal de saída é igual ao de alimentação). Por se tratar de um tanque perfeitamente agitado, a concentração desse componente na corrente de saída, C, é igual à concentração em qualquer ponto do interior do tanque. A situação está ilustrada na figura



O balanço de massa ao tanque determina a igualdade entre a taxa de variação da quantidade do componente no interior do tanque ($V\dfrac{dC}{dt}$) e a diferença entre as respectivas taxas de entrada (QC_e) e de saída (QC). Obtém-se então a seguinte equação, cuja solução permite obter a evolução, ao longo do tempo t, da concentração à saída do tanque

$$V\frac{dC}{dt} = QC_e - QC.$$

Seja C_0 a concentração inicial (para $t = 0$) no interior do tanque.

(a) Sabendo que a concentração à entrada do tanque é constante, determine a solução analítica do problema.

Se $C_e = 50$ mg/l, $Q = 5$ l/min, $V = 100$ l e $C_0 = 10$ mg/l, represente graficamente a evolução da concentração à saída do tanque ao longo da primeira hora.

(b) Sabendo que a concentração à entrada do tanque varia sinusoidalmente com o tempo, de acordo com

$$C_e = 50 + 20\sin\frac{\pi t}{30},$$

utilize o método de Euler para determinar a evolução da concentração à saída do tanque ao longo das primeiras 4 horas de operação, mantendo-se as condições de Q, V e C_0 idênticas às da alínea anterior.