

Análise Matemática

CÁLCULO DIFERENCIAL, PRIMITIVAS E CÁLCULO INTEGRAL
DE FUNÇÕES DE UMA VARIÁVEL

(SOLUÇÕES)

Jorge Orestes Cerdeira, Isabel Martins, Ana Isabel Mesquita

INSTITUTO SUPERIOR DE AGRONOMIA

- 2011 -

Capítulo 1

Complementos sobre derivadas

1.1 Regra de Cauchy

EXERCÍCIOS 1

1. Calcule, se existir, cada um dos seguintes limites.

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{6x^2 - 10x - 4}$

Solução: $\frac{1}{14}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\cos x - 1}$

Solução: Não existe

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\sqrt[3]{x^5}}$

Solução: $+\infty$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^3 - 5x + 1}{\ln x}$

Solução: $+\infty$

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{\ln(1 + x) - x}$

Solução: -1

EXERCÍCIOS 2

1. Calcule, caso existam, os seguintes limites.

a) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 2x - 3}{2x^2 + 3x - 9}$

Solução: $\frac{4}{9}$

- b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - e^{-x}}{\ln x}$ **Solução:** 0
- c) $\lim_{x \rightarrow 0} x e^{1/x}$ **Solução:** Não existe
- d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x}$ **Solução:** 0
- e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x})$ **Solução:** $+\infty$
- f) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{tg} x \ln x$ **Solução:** 0
- g) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^{1/x}$ **Solução:** 0
- h) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/x}$ **Solução:** 1
- i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x + \ln \frac{1}{x})$ **Solução:** $+\infty$
- j) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\ln x)}{\ln x}$ **Solução:** 0
- k) $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\ln x}$ **Solução:** 1
- l) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{5x}$ **Solução:** e^5
- m) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x - 1)^x$ **Solução:** 1
- n) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right)$ **Solução:** $-\frac{1}{2}$
- o) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x \ln(\sin x)$ **Solução:** 0
- p) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x - \operatorname{tg} x}$ **Solução:** $-\frac{1}{2}$
- q) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln^2 x)^x$ **Solução:** 1

2. Determine, caso existam, as assíntotas dos gráficos das seguintes funções.

a) $y = \frac{3x^2 - 5x + 6}{2x - 3}$

Solução: Vertical: $x = \frac{3}{2}$. Oblíqua à direita e à esquerda: $y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{4}$.

b) $y = \sqrt{x^2 - x}$

Solução: Oblíqua à esquerda: $y = -x + \frac{1}{2}$. Oblíqua à direita: $y = x - \frac{1}{2}$.

c) $y = (x^2 + 2x)e^{-x}$

Solução: Horizontal à direita: $y = 0$.

d) $y = 2x - \frac{1}{x}e^{1+\frac{3}{x}}$

Solução: Vertical: $x = 0$. Obliqua à direita e à esquerda: $y = 2x$.

e) $y = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } x < 0 \\ 1 + e^{-x} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$

Solução: Vertical: $x = 0$. Horizontal à esquerda: $y = 0$. Horizontal à direita: $y = 1$.

3. Identifique os maiores domínios de continuidade e derivabilidade das seguintes funções e defina as correspondentes derivadas de 1ª ordem.

a) $y = \begin{cases} x \ln x & \text{se } x > 0 \\ x^2 + 1 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$

Solução: f é contínua e derivável em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. $f'(x) = \begin{cases} 1 + \ln(x) & , x > 0 \\ 2x & , x < 0 \end{cases}$

b) $y = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

Solução: f é contínua e derivável em \mathbb{R} . $f'(x) = \begin{cases} \frac{e^x x - e^x + 1}{x^2} & , x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & , x = 0 \end{cases}$

c) $y = \begin{cases} e^{-\frac{2}{x^2}} - 1 & \text{se } x \neq 0 \\ -1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

Solução: f é contínua e derivável em \mathbb{R} . $f'(x) = \begin{cases} 4x^{-3}e^{-\frac{2}{x^2}} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$

1.2 Fórmula de Taylor

EXERCÍCIOS 3

1. Escreva os polinômios de Taylor de ordens 1, 2 e 3 de $f(x) = \ln x$ no ponto $a = 1$.

Solução: $P_1(x) = x - 1$, $P_2(x) = (x - 1) - \frac{(x-1)^2}{2}$, $P_3(x) = (x - 1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3}$

2. Escreva o polinômio de MacLaurin de ordem 3 para cada uma das seguintes funções:

a) $f(x) = (x - 1)^3 + 5(x - 1)^2 + 3$

Solução: $P_3(x) = 7 - 7x + 2x^2 + x^3$

b) $f(x) = xe^x$

Solução: $P_3(x) = x + x^2 + \frac{1}{2}x^3$

c) $f(x) = \sin(\frac{\pi}{2}x)$

Solução: $P_3(x) = \frac{\pi}{2}x - \frac{\pi^3}{48}x^3$

d) $f(x) = \cos x$

Solução: $P_3(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$

e) $f(x) = \operatorname{tg} x$.

Solução: $P_3(x) = x + \frac{x^3}{3}$

3. Use a fórmula de Taylor para escrever o polinómio $P(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 2$ como soma de potências de $x + 2$.

Solução: $P(x) = -28 + 25(x + 2) - 8(x + 2)^2 + (x + 2)^3$

4. a) Escreva o polinómio de Taylor de ordem 2 da função \sqrt{x} no ponto $a = 1$.

Solução: $P_2(x) = 1 + \frac{1}{2}(x - 1) - \frac{1}{8}(x - 1)^2$

- b) Utilize o polinómio da alínea anterior para indicar um valor aproximado de $\sqrt{\frac{1}{2}}$. **Solução:** $\frac{23}{32}$

5. Seja $P_2(x)$ o polinómio de MacLaurin de ordem 2 da função $f(x) = \frac{1}{(x + 1)^2}$.

a) Explícite $P_2(x)$. **Solução:** $P_2(x) = 1 - 2x + 3x^2$

- b) Justifique que, para valores positivos de x , tem-se $P_2(x) > f(x)$.

6. Seja $f(x) = \sqrt{x + 2}$.

- a) Escreva a fórmula de MacLaurin de ordem 1 de f .

Solução: $f(x) = \sqrt{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}x - \frac{1}{8\sqrt{(c+2)^3}}x^2$ em que $c \in]0, x[$ para $x > 0$ e $c \in]x, 0[$ para $-2 \leq x < 0$

- b) Mostre que o gráfico de f está sempre abaixo da recta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 0.

7. Utilize a fórmula de Taylor para mostrar que $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x$, para $x \in]0, \pi[$.

8. Seja $f(x) = 5 \ln(1 + x)$.

- a) Determine a equação de uma parábola que aproxime o gráfico $y = f(x)$ numa vizinhança de $a = 0$. **Solução:** $y = 5x - \frac{5}{2}x^2$

- b) Justifique que o erro cometido ao aproximar o valor de $f(x)$ no ponto $x = 0.1$ através da parábola obtida na alínea a) é inferior a $\frac{5}{3}(0.1)^3$.

9. Considere a função $f(x) = 2 \ln(\cos x)$.

- a) Determine o polinómio de Taylor de 2º grau que aproxima $f(x)$ para pontos próximos de 0.

Solução: $P_2(x) = -x^2$

- b) Prove que o erro cometido pela aproximação definida em a) é inferior a $\frac{4}{3}x^3$ para $x \in]0, \frac{\pi}{4}[$.

1.3 Complementos sobre estudo de funções

EXERCÍCIOS 4

1. Calcule o valor de cada uma das seguintes expressões:

- | | |
|--|---------------------------------|
| a) $\arcsin 1 - \arcsin(-1)$ | Solução: π |
| b) $\operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg}(-1)$ | Solução: $\frac{\pi}{2}$ |
| c) $\arcsin(\sin \frac{5}{6}\pi)$ | Solução: $\frac{\pi}{6}$ |
| d) $\cos(\arcsin 0.6)$ | Solução: $\sqrt{0.64}$ |
| e) $\sin(2 \arcsin 0.6)$ | Solução: 0.96 |
| f) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} \frac{\pi}{7})$ | Solução: $\frac{\pi}{7}$ |
| g) $\sin(\arcsin 0.123)$. | Solução: 0.123 |

2. Calcule $\frac{dy}{dx}$:

- | | |
|--|---|
| a) $y = \arcsin \frac{x-1}{x+1}$ | Solução: $\frac{1}{(x+1)\sqrt{x}}$ |
| b) $y = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x^2$ | Solução: $\frac{x}{1+x^4}$ |
| c) $y = x(\arcsin x)^2$. | Solução: $\arcsin^2 x + \frac{2x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ |

3. Calcule:

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x \right)$ **Solução:** 1
- b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\operatorname{arctg} x}$ **Solução:** 2
- c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{arctg} x}{1 - \cos 2x}$ **Solução:** $+\infty$
- d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$ **Solução:** $\frac{1}{3}$
- e) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arcsin x}{\sin^2 3x}$ **Solução:** $+\infty$
- f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin(2x)}{\arcsin(3x)}$ **Solução:** $\frac{2}{3}$

EXERCÍCIOS 5

Estude as seguintes funções, indicando para cada uma delas o domínio, assíntotas, intervalos de monotonia e extremos, sentido da concavidade e pontos de inflexão. Esboce o gráfico de cada uma destas funções.

1. $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$ 2. $f(x) = \frac{-4}{\sqrt{5x+2}}$ 3. $f(x) = x^2|2x-1|$
4. $f(x) = x \ln^2 x$ 5. $f(x) = \frac{1}{\ln x-1}$ 6. $f(x) = x + \ln(x^2-1)$
7. $f(x) = e^{-x^2}$ 8. $f(x) = \arcsin\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)$ 9. $f(x) = x - 2 \operatorname{arctg}(x-1)$
10. $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$ 11. $f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} & \text{se } x < 0 \\ 1 + e^{x^2} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$.

Capítulo 2

Primitivação

EXERCÍCIOS 6 Calcule

1. $P \frac{e^x}{1 + e^x}$

Solução: $\ln(1 + e^x)$

2. $P \frac{e^x}{1 + e^{2x}}$

Solução: $\operatorname{arctg} e^x$

3. $P \frac{e^x}{\sqrt{1 + e^x}}$

Solução: $2\sqrt{1 + e^x}$

4. $P \frac{e^x}{\sqrt{1 - e^{2x}}}$

Solução: $\arcsin e^x$

5. $P \frac{\cos x}{\sin x}$

Solução: $\ln |\sin x|$

6. $P \frac{\cos x}{\sin^2 x}$

Solução: $-\operatorname{cosec} x$

7. $P \cos x \sin^2 x$

Solução: $\frac{1}{3} \sin^3 x$

8. $P \frac{\sqrt{1 + \ln x}}{x}$

Solução: $\frac{2}{3}(1 + \ln x)^{\frac{3}{2}}$

9. $P \frac{1}{x(1 + \ln^2 x)}$

Solução: $\operatorname{arctg} \ln x$

10. $P \frac{1}{x(1 + \ln x)}$.

Solução: $\ln(1 + \ln x)$

EXERCÍCIOS 7

Calcule uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

1. xe^x **Solução:** $e^x(x - 1)$
2. $x \ln x$ **Solução:** $\frac{1}{4}(2x^2 \ln x - x^2)$
3. $\operatorname{arctg} x$ **Solução:** $x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2)$
4. $x^2 \sin x$ **Solução:** $(2 - x^2) \cos x + 2x \sin x$
5. $\ln(x^2 + 1)$. **Solução:** $2 \operatorname{arctg} x + x(\ln(x^2 + 1) - 2)$

EXERCÍCIOS 8

Calcule uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

1. $\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x^3}}$ **Solução:** $2 \operatorname{arctg} \sqrt{x}$
2. $\sin(\ln x)$ **Solução:** $\frac{1}{2}x(\sin(\ln x) - \cos(\ln x))$
3. $\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$ **Solução:** $\frac{1}{2}(\arcsin x - x\sqrt{1-x^2})$
4. $\frac{e^{2x}}{1+e^x}$ **Solução:** $e^x - \ln(1 + e^x)$
5. $\frac{e^{2x}}{\sqrt{1-e^{2x}}}$. **Solução:** $-\sqrt{1-e^{2x}}$

EXERCÍCIOS 9

Calcule uma primitiva de cada uma das seguintes funções racionais:

1. $\frac{1}{(x-4)^5}$ **Solução:** $-\frac{1}{4(x-4)^4}$
2. $\frac{x+16}{(x-1)^2}$ **Solução:** $\frac{17}{1-x} + \ln|x-1|$
3. $\frac{x^2+1}{x(x-1)^2}$ **Solução:** $\frac{2}{1-x} + \ln|x|$
4. $\frac{x^3+1}{x^3-x^2}$ **Solução:** $\frac{1}{x} + x + 2 \ln|x-1| - \ln|x|$

EXERCÍCIOS 10

1. Mostre que

a) $P \operatorname{arctg} x = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2)$

b) $P \frac{x}{4 - x^2 + \sqrt{4 - x^2}} = \ln(\sqrt{4 - x^2} + 1)$

c) $P \frac{x}{\sqrt{ax + b}} = \frac{2}{3a^2}(ax - 2b)\sqrt{ax + b}$, com $a, b \in \mathbb{R}$

2. Calcule uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

a) $\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$

Solução: $2e^{\sqrt{x}}$

b) $e^x \sin e^x$

Solução: $-\cos e^x$

c) $\frac{x}{\sqrt{1 - x^4}}$

Solução: $\frac{1}{2} \operatorname{arcsin} x^2$

d) $\ln(\cos x) \operatorname{tg} x$

Solução: $-\frac{1}{2} \ln^2 \cos x$

e) $x\sqrt{1 - x^2}$

Solução: $-\frac{1}{3}(1 - x^2)^{\frac{3}{2}}$

f) $\frac{\sqrt{\ln x}}{x}$

Solução: $\frac{2}{3} \sqrt{\ln^3 x}$

g) $\frac{\sin x}{3 - 2 \cos x}$

Solução: $\frac{1}{2} \ln |3 - 2 \cos x|$

h) $\frac{1 + x}{\sqrt{1 - x^2}}$

Solução: $\operatorname{arcsin} x - \sqrt{1 - x^2}$

i) $\frac{1 + \sin x}{\cos^2 x}$

Solução: $\operatorname{tg} x + \sec x$

j) $\frac{1}{1 + e^{-x}}$

Solução: $\ln(e^x + 1)$

k) $\frac{e^{2x}}{1 + e^{4x}}$

Solução: $\frac{1}{2} \operatorname{arctg} e^{2x}$

l) $\frac{1}{x\sqrt{\ln x}}$

Solução: $2\sqrt{\ln x}$

m) $\frac{\operatorname{arcsin} x}{\sqrt{1 - x^2}}$

Solução: $\frac{1}{2} \operatorname{arcsin}^2 x$

n) $(e^x + 2)^2$

Solução: $\frac{1}{2} e^{2x} + 4e^x + 4x$

o) $\frac{x}{e^x}$

Solução: $-e^{-x}(x + 1)$

p) $x \sec^2 x$

Solução: $x \operatorname{tg} x + \ln |\cos x|$

q) $\sqrt{x} \ln x$	Solução: $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}(\ln x - \frac{2}{3})$
r) xe^{2x}	Solução: $\frac{1}{2}e^{2x}(x - \frac{1}{2})$
s) $x \sin \frac{x}{2}$	Solução: $-2x \cos \frac{x}{2} + 4 \sin \frac{x}{2}$
t) $\ln(x^3)$	Solução: $3x(\ln x - 1)$
u) $x \operatorname{arctg} x$	Solução: $\frac{1}{2}(x^2 + 1) \operatorname{arctg} x - \frac{x}{2}$
v) $\cos(\ln x)$	Solução: $\frac{1}{2}x(\cos \ln x + \sin \ln x)$
x) $\frac{x^4}{1-x}$	Solução: $-(\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x) - \ln 1-x $
y) $\frac{1}{x^2 + 3x - 10}$	Solução: $\frac{1}{7} \ln x-2 - \frac{1}{7} \ln x+5 $
w) $\frac{x-3}{x^3+x^2}$	Solução: $\frac{3}{x} + 4 \ln x - 4 \ln x+1 $
I) $\frac{x}{(x-1)^2}$	Solução: $\ln x-1 - \frac{1}{x-1}$
II) $\frac{1}{1+\sqrt[3]{x}}$	Solução: $3(\frac{x^{\frac{2}{3}}}{2} - x^{\frac{1}{3}} + \ln x^{\frac{1}{3}} + 1)$
III) $\frac{e^{2x} + 2e^{3x}}{1-e^x}$	Solução: $-3e^x - e^{2x} + 3 \ln 1-e^x $
IV) $\frac{1}{\sqrt{e^x+1}}$	Solução: $\ln \frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}$
V) $\frac{e^{3x}}{\sqrt{e^x+1}}$	Solução: $\frac{2}{15}\sqrt{1+e^x}(8-4e^x+3e^{2x})$
VI) $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$	Solução: $2\sqrt{x} + x + 2 \ln \sqrt{x}-1 $
VII) $\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$	Solução: $2x^{\frac{1}{2}} - 3x^{\frac{1}{3}} + 6x^{\frac{1}{6}} - 6 \ln 1+x^{\frac{1}{6}} $

3. Determine a função f duas vezes derivável em \mathbb{R}^+ e que verifica as seguintes condições:

$$f''(x) = \frac{1}{x^2} + e^{-x}, \quad f'(1) = -1 \quad \text{e} \quad f(1) = \frac{2}{e}.$$

Solução: $f(x) = -\ln |x| + e^{-x} + \frac{1}{e}x$

4. Uma população de bactérias cresce à taxa de $N'(t) = 2^t$ milhões de bactérias por hora, onde $N(t)$ denota o número de bactérias ao fim de t horas. Se $N(0)=14$ (milhões), determine uma expressão para $N(t)$ e calcule a dimensão da população ao fim de 2 horas.

Solução: $N(t) = \frac{2^t}{\ln 2} + 14 - \frac{1}{\ln 2}$; 18328085 bactérias.

5. Após uma substância estranha ser introduzida no sangue de um dado animal, são produzidos anticorpos à taxa $f(t) = \frac{t}{t^2+1}$ milhares de anticorpos por minuto. Determine o número de anticorpos no sangue ao fim de 4 minutos, sabendo que no instante $t = 0$ não há anticorpos.

Solução: 1417 anticorpos

Capítulo 3

Cálculo integral

3.1 Integral definido

EXERCÍCIOS 11 Calcule os seguintes integrais.

1. $\int_0^1 x \, dx$ **Solução:** $\frac{1}{2}$

2. $\int_0^1 x^\alpha \, dx$, com $\alpha \geq 0$. **Solução:** $\frac{1}{\alpha+1}$

3. $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} 2 - x^2 \, dx$ **Solução:** $\frac{8}{3}\sqrt{2}$

4. $\int_1^2 (2x^5 - \frac{1}{x^2}) \, dx$ **Solução:** $\frac{41}{2}$

5. $\int_0^{\sqrt{\pi}} x \cos(x^2 - \pi) \, dx$ **Solução:** 0

6. $\int_2^3 \frac{x}{x^2 - 25} \, dx$ **Solução:** $\frac{1}{2}(\ln 16 - \ln 21)$

7. $\int_1^{e^2} \frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \, dx$ **Solução:** 2

$$8. \int_0^2 f(x) dx, \text{ com } f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{x+4}{2}, & 1 < x \leq 2 \end{cases} \quad \text{Solução: } \frac{49}{12}$$

$$9. \int_0^1 x2^x dx \quad \text{Solução: } \frac{2}{\ln 2} - \frac{1}{\ln^2 2}$$

$$10. \int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} (x + \cos x) \sin x dx \quad \text{Solução: } \frac{3}{2} + \pi$$

$$11. \int_0^1 e^x \operatorname{arctg}(e^x) dx \quad \text{Solução: } e \operatorname{arctg} e - \frac{1}{2} \ln(1 + e^2) + \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{\pi}{4}$$

$$12. \int_0^1 \frac{e^{2x}}{e^x + 4} dx. \quad \text{Solução: } 4 \ln 5 - 4 \ln(e + 4) + e - 1$$

EXERCÍCIOS 12

1. Calcule a área das seguintes regiões:

a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, -x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}$ **Solução:** $\frac{8}{3} + \frac{4}{3}\sqrt{2}$

b) Determine a área da região definida pelos gráficos das funções $f(x) = \cos x$ e $g(x) = x - \frac{\pi}{2}$ no intervalo $[0, \pi]$.

Solução: $2 + \frac{\pi^2}{4}$

c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, x^2 - 1 \leq y \leq \arccos x\}$ **Solução:** $\pi + \frac{4}{3}$

d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + y \leq 2, y \geq x^2 - 4\}$ **Solução:** $\frac{44}{3}$

e) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |\sin x| \leq y \leq e^x, 0 \leq x \leq 2\pi\}$. **Solução:** $e^{2\pi} - 5$

f) Determine a área da região definida por $\{(x, y) : |\cos x| \leq y \leq x + 1, x \leq \pi\}$.

Solução: $\frac{\pi^2}{2} + \pi - 2$

2. Calcule a área da região contida no semi-plano $x \geq 1$ e delimitada pelas curvas $y = x^2$, $x = y^2$ e $y = 4$.

Solução: $\frac{49}{3}$

3. Calcule a área da região do plano delimitada pelas curvas $y = \sin x$ e $y = \cos x$ e pelas rectas $x = 0$ e $x = 2\pi$.

Solução: $4\sqrt{2}$

4. Considere a região $A = \{(x, y) : y \geq x^2 \wedge y \leq 1\}$. Determine o número real K tal que a recta $y = K$ divide A em duas regiões de área igual.

Solução: $K = \sqrt[3]{\frac{1}{4}}$

EXERCÍCIOS 13

1. Um insecto voa (num período limitado de tempo) com a velocidade $v(t) = 10 + 8t - t^2$ metros por segundo.
- a) Trace o gráfico de $v(t)$ e identifique geometricamente a distância percorrida pelo insecto durante os primeiros cinco segundos.
- b) Calcule essa distância.

Solução: $\frac{325}{3}$ m

2. A taxa de variação diária da quantidade de água numa planta (em gramas por hora) é dada por $V'(t) = -0.041667t(24-t) + 4$, em que t é o tempo em horas ($0 \leq t \leq 24$). Será que ao fim do dia a planta perdeu ou ganhou água?

Solução: Perdeu (7.68×10^{-4} g de água em relação ao instante inicial).

3. O perfil de um dado solo revelou que a concentração de azoto (em g/m^3) é dada por $y = 673.8 - 34.7x$, em que $x \in [0, 10]$ é a profundidade do solo (em m). Calcule a concentração média de azoto no solo.

Solução: $500.3 \text{ g}/\text{m}^3$

4. A população P (em milhões de pessoas) de um dado país é dada por $P = 67.38(1.026)^t$, em que t é o tempo em anos desde 1980. Qual é a população média entre 1980 e 1990?

Solução: 76.817 milhões

5. Suponha que X mede o tempo (em horas) que um estudante demora a concluir uma prova de exame cuja duração é de duas horas, e que a função densidade de X é

$$f(x) = \frac{x^3}{4}, \quad x \in [0, 2].$$

- a) Qual é a probabilidade de um estudante demorar entre 1.5 h e 2h a fazer o exame?

Solução: 0.684

- b) Determine a tal que $\int_0^a f(x) dx = 0.5$. Interprete o parâmetro a no contexto do problema.

Solução: $a = 1.6818$ horas; metade dos alunos concluem o exame em $a = 1.6818$ ou menos horas.

6. Seja $f(x) = 0.1e^{-0.1x}$ para $x \geq 0$, a função densidade do tempo de espera (em minutos) de uma pessoa numa paragem de autocarros.

a) Qual é a probabilidade de o tempo de espera não exceder 5 min?

Solução: 0.212

b) Qual é a percentagem de pessoas que espera mais de 1/2 h?

Solução: 4.98%

7. Uma bola de ferro é atraída por um íman com um força $F = \frac{15}{x^2}$ N quando a bola está a x metros do íman.

a) Calcule o trabalho realizado pela força quando a bola sofre um deslocamento de 4 m na mesma direcção e em sentido contrário aos da força, supondo que a bola e o íman se encontravam à distância de 2 m.

Solução: -5 J

b) Calcule a força média aplicada na bola na situação descrita em a).

Solução: $\frac{5}{4}$

3.2 Integral indefinido

EXERCÍCIOS 14

1. Determine uma expressão para $\int_0^x (te^t - te) dt$ onde não figure o símbolo do integral.

Solução: $-\frac{e}{2}x^2 + e^x(x-1) + 1$

2. Considere $f(t) = \begin{cases} 2, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & 1 \leq t < 3 \\ -1, & 3 \leq t \leq 4 \end{cases}$. Represente graficamente a função $\int_0^x f(t) dt$,

com $x \in [0, 4]$.

3. Escreva a função $\int_{-2}^x t|t-1| dt$ sem recurso ao símbolo do integral.

Solução:
$$\int_{-2}^x t|t-1| dt = \begin{cases} -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - \frac{14}{3}, & x < 1 \\ \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - \frac{13}{3}, & x \geq 1 \end{cases}$$

4. Considere a função $F(x) = \int_0^x (3 - \sin^2 t) dt$.

- a) Mostre que F é estritamente crescente em \mathbb{R} .
b) Indique uma equação da recta tangente ao gráfico de F em $x = 0$.

Solução: $y = 3x$

5. Considere $F(x) = \int_1^x \frac{e^{-t}}{t} dt$, com $x > 0$. Estude a monotonia de F e o sentido da concavidade do gráfico de F em \mathbb{R}^+ .

Solução: Estritamente crescente e concavidade virada para baixo em \mathbb{R}^+

6. Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \int_0^x e^{-t} dt}{e^{x^3} - 1}$.

Solução: 1

3.3 Integral impróprio

EXERCÍCIO 15 Prove a Proposição 3.11.

EXERCÍCIOS 16 Estude a natureza de cada um dos seguintes integrais impróprios e, em caso de convergência, indique o seu valor.

1. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 4} dx$

Solução: $\frac{\pi}{4}$

2. $\int_0^2 \frac{1}{4 - x^2} dx$

Solução: divergente

3. $\int_3^{+\infty} \frac{1}{x^2 - 1} dx$ **Solução:** $\frac{\ln 2}{2}$
4. $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} dx$ **Solução:** divergente
5. $\int_0^2 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$ **Solução:** $2\sqrt{2} \ln 2 - 4\sqrt{2}$
6. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ **Solução:** divergente
7. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx$ **Solução:** $\frac{\pi}{2}$
8. $\int_0^{+\infty} e^{-x} \sin x dx$ **Solução:** $\frac{1}{2}$
9. $\int_0^1 \frac{1}{x(x-1)} dx.$ **Solução:** divergente

EXERCÍCIO 17 Calcule a área da região ilimitada do 1º quadrante compreendida entre a curva $y = xe^{-x^2}$ e a sua assíntota. **Solução:** $\frac{1}{2}$

EXERCÍCIO 18 A taxa à qual as aves de uma dada região adoecem durante uma epidemia de gripe (em número de aves por dia) é dada por $R(t) = 1000te^{-0.5t}$, em que t é medido em dias desde o início da epidemia. Traduza através do integral impróprio o número total de aves atingidas e calcule o seu valor. **Solução:** $\int_0^{+\infty} 1000te^{-0.5t} dt = 4000$ aves

EXERCÍCIOS 19 Estude a natureza dos seguintes integrais impróprios.

1. $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2} dx$ **Solução:** convergente
2. $\int_1^{+\infty} \frac{x+4}{e^x} dx$ **Solução:** convergente
3. $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-|\sin x|}}{x} dx$ **Solução:** divergente

4. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x}{1+x^2} dx$ **Solução:** divergente
5. $\int_0^1 \ln \frac{1}{x} dx$ **Solução:** convergente
6. $\int_0^1 \frac{1+\sin^2 x}{x} dx$ **Solução:** divergente
7. $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt[3]{x}-1} dx$ **Solução:** divergente
8. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}(2-x)} dx$ **Solução:** convergente
9. $\int_0^1 \frac{1}{1-\cos x} dx$. **Solução:** divergente

EXERCÍCIOS 20

1. Calcule o valor de cada uma das seguintes expressões.

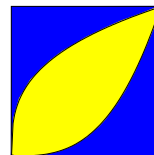
- a) $\int_0^1 x^3 \sqrt{1-x^2} dx$ **Solução:** $\frac{2}{15}$
- b) $\int_1^3 |2-x| dx$ **Solução:** 1
- c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^x e^{t^2} dt$ **Solução:** 1
- d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \int_0^x e^{-t^2} dt}{1 - e^{-x^2}}$ **Solução:** 1

2. Calcule a área de cada uma das seguintes regiões.

- a) $\{(x, y) : y \geq e^x, y \geq e^{-x}, y \leq 2\}$ **Solução:** $4 \ln 2 - 2$
- b) $\{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, -e^x \leq y \leq x^2\}$ **Solução:** $e - \frac{2}{3}$
- c) $\{(x, y) : y \geq (x-1)^2, y \leq 1-x^2\}$ **Solução:** $\frac{1}{3}$
- d) $\{(x, y) : \ln x \leq y \leq e^x, y \geq -x+1, x \leq e\}$ **Solução:** $e^e - \frac{5}{2}$

3. Calcule a área da região delimitada pela curva $y = x^3$, pela recta $y = 1$ e pela recta com declive -2 e que passa no ponto $(-1,-1)$. **Solução:** 3

4. Um industrial de cerâmica pretende fabricar azulejos quadrados com duas cores, azul e amarelo, com o padrão ilustrado na figura ao lado. A região amarela é delimitada pelos gráficos das funções x^α e $x^{\frac{1}{\alpha}}$, com $\alpha > 1$. Determine α de forma que as duas cores ocupem áreas iguais.



Solução: $\alpha = 3$

5. Determine uma expressão para a função $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) = \int_0^x f(t) dt, \text{ com } f(t) = \begin{cases} 2t & \text{se } t \leq 0 \\ e^t - 1 & \text{se } t > 0 \end{cases},$$

onde não figure o símbolo do integral.

Solução: $\varphi(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leq 0 \\ e^x - x - 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$

6. Considere a função $\varphi : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) = \int_0^x f(t) dt, \text{ com } f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{t+1}} & \text{se } 0 \leq t \leq 1 \\ \frac{1}{1+t^2} & \text{se } t > 1 \end{cases}.$$

a) Determine uma expressão para a função φ que não utilize o símbolo do integral.

Solução: $\varphi(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x+1} - 2 & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ 2\sqrt{2} - 2 - \frac{\pi}{4} + \text{arctg } x & \text{se } x > 1 \end{cases}$

b) Calcule $\int_0^{+\infty} f(t) dt$. **Solução:** $2\sqrt{2} - 2 + \frac{\pi}{4}$

7. Estude a natureza de cada um dos seguintes integrais impróprios.

a) $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-2x}}{x} dx$ **Solução:** convergente

b) $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{2+x^2} dx$. **Solução:** convergente

8. Calcule o valor de cada um dos seguintes integrais impróprios.

a) $\int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{1-x}} \right) dx$ **Solução:** 4

b) $\int_0^{+\infty} x e^{-x} dx$. **Solução:** 1

9. Determine β que satisfaz $\int_{-\infty}^{+\infty} \beta e^{-5|x|} dx = 1$. **Solução:** $\beta = \frac{5}{2}$

10. Considere a função $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$F(x) = \int_{-1}^x f(t) dt, \text{ com } f(t) = \begin{cases} 1 - e^{-t} & \text{se } t < 0 \\ \frac{\operatorname{arctg} t}{1+t^2} & \text{se } t \geq 0 \end{cases}.$$

a) Calcule $F(1)$. **Solução:** $2 - e + \frac{1}{2}(\frac{\pi}{4})^2$

b) Determine $F'(x)$. **Solução:** $F'(x) = f(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & \text{se } x < 0 \\ \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$

c) Para $g(x) = x^2$, identifique $(F(g(x)))'$.

Solução: $(F(g(x)))' = \frac{\operatorname{arctg} x^2}{1+x^4} 2x$

d) Determine $c \in \mathbb{R}$ tal que $\int_{-1}^{+\infty} f(x) dx = F(1) + c$. **Solução:** $\frac{3\pi^2}{32}$

11. Considere a função $f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{1+x^2} & \text{se } x > 1 \end{cases}$.

a) Calcule $\int_0^1 f(x) dx$. **Solução:** 1

b) Indique uma expressão para $\int_0^x f(t) dt$, com $x \in \mathbb{R}_0^+$, em que não figure o símbolo do integral.

Solução: $\int_0^x f(t) dt = \begin{cases} x^3 & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ \operatorname{arctg} x + 1 - \frac{\pi}{4} & \text{se } x > 1 \end{cases}$

c) Calcule $\int_1^{+\infty} f(x) dx$. **Solução:** $\frac{\pi}{4}$

d) Diga, justificando, se é verdadeira ou falsa a afirmação

existe um par $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_0^+$, com $x_1 < x_2$, tal que $\int_0^{x_1} f(t) dt > \int_0^{x_2} f(t) dt$.

Solução: A função f é não negativa e, por isso, $\int_0^x f(t) dt$ é crescente. Assim, a afirmação é falsa.

12. Considere as funções $f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{se } x < 0 \\ \frac{1}{x+1} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$ e $F(x) = \int_{-1}^x f(t) dt$, com $x \in \mathbb{R}$.

a) Calcule $F(1)$ e $F'(1)$. **Solução:** $F(1) = \ln 2 + \frac{3}{2}$; $F'(1) = \frac{1}{2}$

b) Indique, justificando, a natureza do integral impróprio $\int_0^{+\infty} f(x) dx$. **Solução:** *divergente*

c) Diga, justificando, se é verdadeira ou falsa a afirmação

existe um par $x_1 \neq x_2 \in \mathbb{R}$ tal que $F(x_1) = F(x_2)$.

Solução: A função f é contínua e, por isso, $F'(x) = f(x)$. Como f é positiva, F é estritamente crescente. Assim, a afirmação é falsa.

13. Considere a função $g(x) = \int_1^x \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt$, com $x \in \mathbb{R}$.

a) Calcule $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1}$. **Solução:** $\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) Determine a equação da recta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa $x = 1$. **Solução:** $y = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}$

c) Prove que não existe $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

14. Considere a função $f(x) = \int_0^x |2-t| dt$, com $x \in \mathbb{R}_0^+$.

a) Determine a expressão analítica de f .

Solução: $f(x) = \begin{cases} -\frac{x^2}{2} + 2x & \text{se } x \leq 2 \\ \frac{x^2}{2} - 2x + 4 & \text{se } x > 2 \end{cases}$

b) Determine f' . **Solução:** $f'(x) = |2 - x|$, $\forall x \in \mathbb{R}$

c) Estude o integral impróprio $\int_0^{+\infty} |2 - t| dt$. **Solução:** Divergente

15. Considere a função $G(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$, com $x \in \mathbb{R}$.

a) Estude a monotonia e a variação de sinal da função G em \mathbb{R} .

Solução: G é estritamente crescente. $G(x) < 0$, para $x < 0$ e $G(x) > 0$, para $x > 0$.

b) Utilizando a fórmula de MacLaurin, mostre que $G(x) \geq \frac{x^3}{3} + x$, $\forall x > 0$.