Análise Matemática

Cálculo diferencial, primitivas e cálculo integral de funções de uma variável

Jorge Orestes Cerdeira, Isabel Martins, Ana Isabel Mesquita

Instituto Superior de Agronomia

- 2011 -

Nestes apontamentos expõe-se a parte relativa a Análise em $\mathbb{R}$ da Unidade Curricular *Análise Matemática I*, do 1º ano das licenciaturas em Engenharia e em Biologia, do Instituto Superior de Agronomia.

Muitos dos exemplos e dos exercícios dos Capítulos 2 e 3 foram retirados dos textos manuscritos da Isabel Faria para apoio às aulas da disciplina pré-Bolonha *Análise Matemática I* e do Capítulo 2 das *Lições de Matemática II* da autoria do Pedro Silva.

A Marta Mesquita produziu as figuras do Anexo do Capítulo 1. O Pedro Silva, com a sua perícia no LaTeX, GnuPlot e XFig e a sua infinita paciência, prestou um apoio precioso na elaboração deste documento.

Jorge Orestes Cerdeira, Isabel Martins e Ana Isabel Mesquita

ISA, Fevereiro 2011

Conteúdo

1 Complementos sobre derivadas **3**

1.1 Regra de Cauchy 4

1.2 Fórmula de Taylor 9

1.3 Complementos sobre estudo de funções 16

2 Primitivação **29**

3 Cálculo integral **47**

3.1 Integral definido 47

3.2 Integral indefinido 66

3.3 Integral impróprio 71

Capítulo 1

Complementos sobre derivadas

A derivada de uma função dá indicações interessantes sobre o comportamento da função (ver Figura 1.1). O sinal da derivada dá informação sobre a monotonia (crescimento e decrescimento). Os zeros da derivada são as abcissas dos possíveis extremos da função (máximos e mínimos). Também o sinal e os zeros da segunda derivada estão relacionados com o sentido da concavidade e os eventuais pontos de inflexão do gráfico da função.

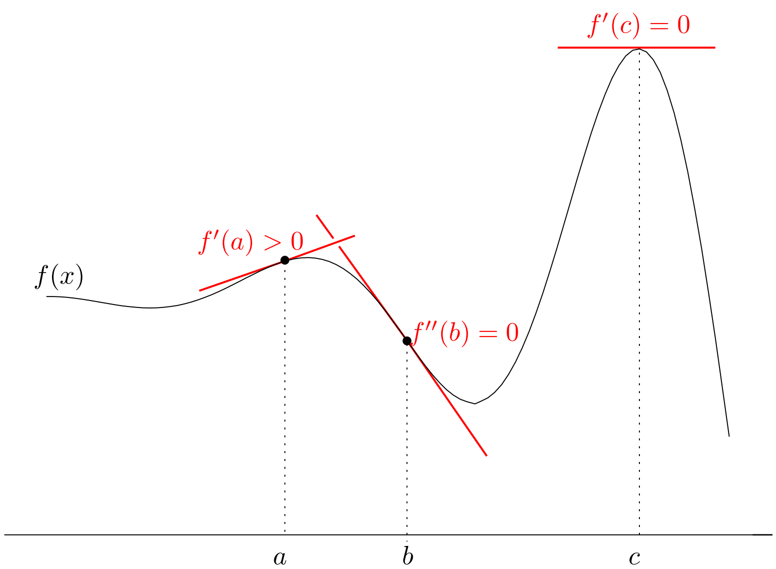


Figura 1.1: Alguns detalhes do gráfico de $f(x)$ e suas relações com 1ª e 2ª derivadas.

Vamos apresentar outras aplicações da derivada. Em particular, vamos usar derivadas para levantar indeterminações no cálculo de limites e para aproximar funções por polinómios.

1.1 Regra de Cauchy

No cálculo dos limites de funções as indeterminações ocorrem quando as regras operatórias dos limites não se aplicam. Por exemplo,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^3-2x+1}{5x^3-4}$$

conduz a uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Esta indeterminação pode ser levantada pondo em evidência os termos de maior grau no numerador e no denominador. Tem-se assim,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^3-2x+1}{5x^3-4}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^3(1+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3})}{5x^3(1-\frac{4}{5x^3})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^3}{5x^3}=-\frac{1}{5}.$$

De uma forma geral para levantar indeterminações geradas por funções racionais, quando x tende para infinito, aplica-se a seguinte fórmula:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_0}=\lim_{x\to+\infty}\frac{a_nx^n}{b_mx^m},\text{com } a_n,b_m\neq 0.$$

O resultado que vamos agora apresentar permite levantar indeterminações geradas por uma grande variedade de funções.

Teorema 1.1 *(Regra de Cauchy: indeterminações $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$)*
Sejam f,g duas funções deriváveis num intervalo aberto I de extremidade a (a pode ser $-\infty$ ou $+\infty$) tal que $g'(x)\neq 0$ para todo o $x\in I$. Se

1. $\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=0$ *ou* ∞, *e*

2. *existe* $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ *(finito ou infinito),*

então

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} \quad = \quad \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Vejamos alguns exemplos de aplicação da regra de Cauchy.

Exemplos 1

1. O limite notável $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}(\frac{0}{0}) = 1$, pode agora ser obtido assim:

   $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sin x)'}{x'} = \lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1.$

2. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln(1+x)}{\ln(1+3x)}(\frac{\infty}{\infty}) = \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\frac{1}{1+x}}{\frac{3}{1+3x}} = \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1+3x}{3+3x} = 1.$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}(\frac{0}{0}) = \lim\limits_{x\to 0}e^x = 1.$

4. $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}(\frac{0}{0}) = \lim\limits_{x\to 0^+}2\sqrt{x}\cos x = 0.$

É de salientar dois tipos de situações que podem ocorrer ao utilizar esta regra.

Observações 1

1. Pode não haver $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ e, no entanto, existir $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

   $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}(\frac{\infty}{\infty}) = \lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{\sin x}{x}) = 1$, uma vez que $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x} = 0$, pois $\left|\frac{\sin x}{x}\right| \leq \frac{1}{|x|}$ e $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{|x|} = 0$.

   Neste caso, a regra de Cauchy não é aplicável dado que $\frac{(x+\sin x)'}{x'} = 1+\cos x$ não tem limite quando x tende para ∞.

2. Em certos casos a regra deve ser aplicada repetidas vezes.

   Para obter $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}(\frac{0}{0}) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{2x}(\frac{0}{0}) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{2} = \dfrac{1}{2}$, aplicámos a regra duas vezes.

A regra de Cauchy permite concluir o seguinte.

Proposição 1.2 Para todo o $\alpha \in \mathbb{R}^+$ tem-se

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$.

2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^\alpha} = 0$.

Assim, quando comparadas com qualquer potência positiva de x, a função e^x cresce mais rapidamente enquanto $\ln x$ cresce mais devagar. (Ver Figura 1.2.)

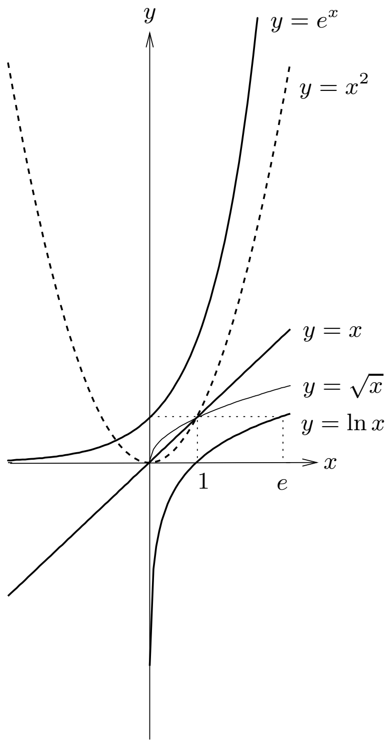


Figura 1.2: Gráficos das funções $\ln x$, e^x, $\sqrt{x}$, x e x^2.

Exercícios 1

1. Calcule, se existir, cada um dos seguintes limites.

a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-2}{6x^2-10x-4}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{\cos x - 1}$ c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{\sqrt[3]{x^5}}$

d) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{4x^3-5x+1}{\ln x}$ e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1-x}{\ln(1+x)-x}$.

2. Prove a proposição 1.2.

A aplicação da regra de Cauchy não se esgota em indeterminações dos tipos $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$, uma vez que indeterminações de outros tipos podem ser convertidos nestes.

Indeterminações $0 \times \infty$

Utilizando $f \cdot g = \dfrac{f}{\frac{1}{g}}$, transformam-se em indeterminações dos tipos $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$.

Exemplos 2

1. $\lim\limits_{x\to 0^+} x \ln x \; {\scriptstyle (0\times\infty)} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}} (\tfrac{\infty}{\infty}) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0^+} -x = 0.$

2. $\lim\limits_{x\to -\infty} xe^x \; {\scriptstyle (\infty\times 0)} = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x}{e^{-x}} (\tfrac{\infty}{\infty}) = \lim\limits_{x\to -\infty} -\dfrac{1}{e^{-x}} = 0.$

Indeterminações $0^0, \infty^0, 1^\infty$

Indeterminações destes tipos transformam-se em indeterminações $0 \times \infty$. Dado que, para $f > 0$, pode escrever-se $f^g = e^{\ln f^g} = e^{\,g \ln f}$, a indeterminação introduzida pela potência exponencial f^g é transferida para o produto $g \ln f$, sob a forma $0 \times \infty$.

Exemplos 3

1. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x \; {\scriptstyle (0^0)} = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} x \ln x} = e^0 = 1$, uma vez que, como vimos atrás, $\lim\limits_{x\to 0^+} x \ln x = 0$.

2. $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}} \; {\scriptstyle (\infty^0)} = \lim\limits_{x\to +\infty} e^{\frac{1}{x}\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{x} \ln x} = e^0 = 1$, visto que $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x} \ln x \; {\scriptstyle (0\times\infty)} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} (\tfrac{\infty}{\infty}) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0.$

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x \; (1^\infty) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x\ln(1+\frac{1}{x})} = e^1 = e$, tendo em conta que $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln(1+\dfrac{1}{x}) \; (\infty\times 0) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}(\frac{0}{0}) \overset{\text{fazendo } y=\frac{1}{x}}{=} \lim\limits_{y\to 0^+}\dfrac{\ln(1+y)}{y} = \lim\limits_{y\to 0^+}\dfrac{1}{1+y} = 1.$

   Note que $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$ generaliza o resultado das sucessões: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e.$

Indeterminações $\infty - \infty$

Geralmente este tipo de indeterminação levanta-se transformando a expressão num quociente.

Vejamos alguns exemplos.

Exemplos 4

1. $$\begin{aligned}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}(\sec x - \operatorname{tg} x) \; (\infty-\infty) &= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\left(\frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x}\right) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{1-\sin x}{\cos x}\left(\tfrac{0}{0}\right) \\ &= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{-\cos x}{-\sin x} = 0.\end{aligned}$$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x - x) \; (\infty-\infty) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\dfrac{\ln x}{x} - 1\right) = -\infty$, atendendo a que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}(\frac{\infty}{\infty}) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x} = 0.$

3. $$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right) \; (\infty-\infty) &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x\sin x}\left(\tfrac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x\cos x + \sin x}\left(\tfrac{0}{0}\right) \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{\cos x - x\sin x + \cos x} = 0.\end{aligned}$$

Exercícios 2

1. Calcule, caso existam, os seguintes limites.

   a) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+2x-3}{2x^2+3x-9}$ b) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^x - e^{-x}}{\ln x}$ c) $\lim\limits_{x\to 0} xe^{1/x}$

   d) $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x}$ e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x}\right)$

   f) $\lim\limits_{x\to 0^+}\operatorname{tg} x \ln x$ g) $\lim\limits_{x\to 0^+}(\sin x)^{1/x}$ h) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{1/x}$

i) $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x + \ln\dfrac{1}{x})$ j) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(\ln x)}{\ln x}$ k) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\ln x}$

l) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{5x}$ m) $\lim\limits_{x\to 0^+}(e^x-1)^x$ n) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$

o) $\lim\limits_{x\to 0^+}\sin x\ln(\sin x)$ p) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x-\operatorname{tg} x}$ q) $\lim\limits_{x\to 0^+}(\ln^2 x)^x$

2. Determine, caso existam, as assimptotas dos gráficos das seguintes funções.

a) $y = \frac{3x^2-5x+6}{2x-3}$ b) $y=\sqrt{x^2-x}$ c) $y=(x^2+2x)e^{-x}$

d) $y = 2x - \frac{1}{x}e^{1+\frac{3}{x}}$ e) $y = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } x<0 \\ 1+e^{-x} & \text{se } x\geq 0 \end{cases}$

3. Identifique os maiores domínios de continuidade e derivabilidade das seguintes funções e defina as correspondentes derivadas de 1ª ordem.

a) $y = \begin{cases} x\ln x & \text{se } x>0 \\ x^2+1 & \text{se } x\leq 0 \end{cases}$ b) $y = \begin{cases} \frac{e^x-1}{x} & \text{se } x\neq 0 \\ 1 & \text{se } x=0 \end{cases}$

c) $y = \begin{cases} e^{-\frac{2}{x^2}}-1 & \text{se } x\neq 0 \\ -1 & \text{se } x=0 \end{cases}$

1.2 Fórmula de Taylor

Os polinómios são funções simples, com propriedades bem conhecidas e particularmente adequados para a realização de cálculos numéricos. Vamos mostrar que muitas funções podem ser aproximadas por polinómios. Neste contexto vai intervir a noção de derivada de ordem superior à primeira.

Define-se, por recorrência, *derivada de ordem* $n\in\mathbb{N}$ de f, que se representa por $f^{(n)}$, a função

$$f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)', \text{ com a convenção } f^{(0)} = f.$$

Também é usual representar a derivada de ordem n de $y=f(x)$ por $\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}$ ou $\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}$.

Exemplos 5

1. As sucessivas derivadas da função $\sin x$ são:

   $\sin^{(0)} x = \sin x,\ \sin' x = \cos x,\ \sin'' x = -\sin x,\ \sin''' x = -\cos x,\ \sin^{(4)} x = \sin x,\ \ldots.$

2. A derivada de qualquer ordem da função exponencial e^x é e^x.

3. As sucessivas derivadas do polinómio $P(x) = 3x^4 - 2x^3 + 4x^2 - x + 1$ são:

   $P'(x) = 12x^3 - 6x^2 + 8x - 1$

   $P''(x) = 36x^2 - 12x + 8$

   $P'''(x) = 72x - 12$

   $P^{(iv)}(x) = 72$

   $P^{(n)}(x) = 0, n \geq 5.$

   Em geral, se $P(x)$ é um polinómio de grau m, tem-se $P^{(n)}(x) = 0$, para $n \geq m + 1$.

As funções que admitem derivadas de qualquer ordem dizem-se indefinidamente deriváveis. Todas as funções dos Exemplos 5 são indefinidamente deriváveis.

Vamos agora mostrar que para toda a função f que admite derivada de ordem n no ponto a, existe um polinómio P_n, de grau menor ou igual do que n, que é uma *boa aproximação* de f para valores de x próximos de a. Mais precisamente, vamos mostrar que o erro $|R_n(x)| = |f(x) - P_n(x)|$ de utilizar o valor de $P_n(x)$ em substituição de $f(x)$ é tal que $\lim_{x\to a} \frac{R_n(x)}{(x-a)^n} = 0$. É este o significado de P_n ser uma boa aproximação de f em pontos próximos de a. Por outras palavras, quando os valores de x se aproximam de a, o erro cometido em x tende mais rapidamente para 0 do que $(x - a)^n$.

Comecemos por analisar o caso em que $n = 1$.

Aproximação de 1ª ordem

Recordemos que se f é uma função derivável no ponto a do seu domínio, a recta de equação

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

é a recta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa a. Se fizermos

$$P_1(x) = y = f(a) + f'(a)(x-a),$$

o erro $|R_1(x)|$ satisfaz $\lim_{x\to a} \frac{R_1(x)}{x-a} = 0$ (ver Figura 1.3). De facto,

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-P_1(x)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-(f(a)+f'(a)(x-a))}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a) = 0.$$

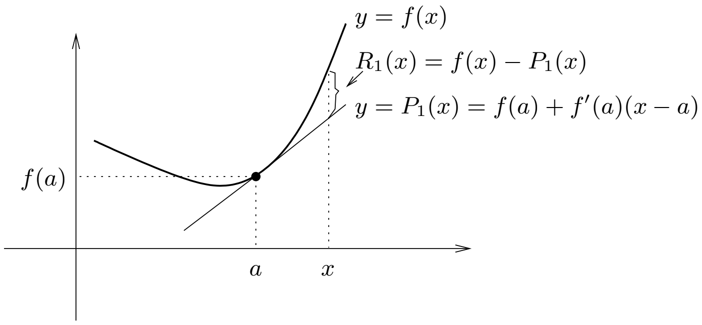


Figura 1.3: Aproximação de 1ª ordem ao gráfico da função $f(x)$ no ponto de abcissa a.

Assim, a recta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa a é uma boa aproximação de 1ª ordem de $f(x)$ para valores de x próximos de a.

Aproximação de 2ª ordem

Se a função f' é derivável em a a aproximação de 1ª ordem de f' é

$$z(x) = f'(a) + f''(a)(x-a),$$

tendo-se $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)-z(x)}{x-a} = 0$.
Qual é o significado desta aproximação da função f' em termos de f?
Se procurarmos a função que no ponto de abcissa a coincide com $f(a)$ e cuja derivada é $z(x)$ [1], obtém-se o polinómio de grau menor ou igual do que 2:

$$P_2(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2$$

[1] esta operação, inversa da derivação, será estudada no Capítulo 2.

que satisfaz

$$\lim_{x\to a}\frac{R_2(x)}{(x-a)^2}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-P_2(x)}{(x-a)^2}\left(\tfrac{0}{0}\right)=\frac{1}{2}\lim_{x\to a}\frac{f'(x)-P_2'(x)}{(x-a)}\underbrace{=}_{P_2'(x)=z(x)}0.$$

Assim, conclui-se que $P_2(x)$ é uma boa aproximação de 2ª ordem de $f(x)$ para valores de x próximos de a.

Exemplo 6 Para valores próximos de 0, a função $f(x)=e^x$ tem como polinómios aproximadores de 1ª e 2ª ordens:

$$P_1(x)=f(0)+f'(0)x=1+x,\quad P_2(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2=1+x+\frac{x^2}{2},$$

respectivamente (ver Figura 1.4).

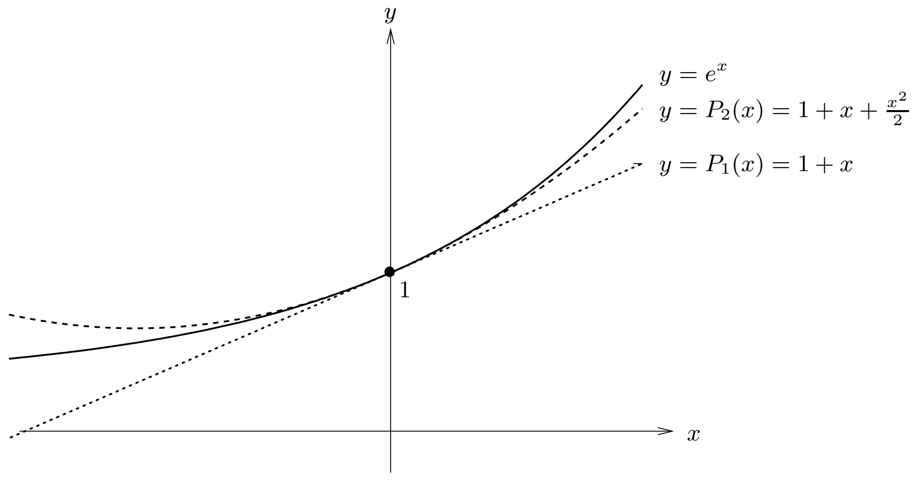


Figura 1.4: Aproximações de 1ª e 2ª ordens ao gráfico de e^x no ponto de abcissa 0.

Constata-se que a aproximação P_2 é mais precisa do que a aproximação P_1, em pontos próximos de $(0, f(0))$.

Aproximação de ordem n

Aplicando o raciocínio anterior a $f^{(n-1)}$ $(n>1)$, conclui-se o seguinte resultado.

Teorema 1.3 *(Fórmula de Taylor) Sejam I um intervalo aberto, f uma função n vezes derivável no ponto $a \in I$ e*

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Tem-se

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x) \quad \text{com} \quad \lim_{x\to a} \frac{R_n(x)}{(x-a)^n} = 0. \tag{1.1}$$

Chama-se a (1.1) *fórmula de Taylor* de ordem n de f no ponto a. O polinómio $P_n(x)$ é designado por *polinómio de Taylor* de ordem n de f em a e $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$ é o *resto de Taylor* de ordem n.

No caso particular de $a = 0$ tem-se

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x),$$

em que $\lim_{x\to 0} \frac{R_n(x)}{x^n} = 0$, que se chama fórmula de *MacLaurin* de ordem n de f. Neste caso o polinómio de Taylor toma o nome de polinómio de MacLaurin.

Exemplos 7

1. O polinómio de Taylor de ordem 3 de $f(x) = \ln x$ no ponto $a = 1$ é

$$P_3(x) = (x-1) - \frac{1}{2!}(x-1)^2 + \frac{2}{3!}(x-1)^3.$$

2. O polinómio de MacLaurin de ordem n de $f(x) = \frac{1}{1-x}$ é

$$P_x(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n.$$

3. Para cada uma das funções indicadas a seguir a correspondente fórmula de MacLaurin de ordem n é

   a) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x)$ com $\lim_{x\to 0} \frac{R_n(x)}{x^n} = 0.$

b) $\ln(1+x) \underbrace{=}_{x>-1} x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + R_n(x)$ com $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{R_n(x)}{x^n} = 0.$

c) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + \sin(\frac{n\pi}{2})\frac{x^n}{n!} + R_n(x)$ com $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{R_n(x)}{x^n} = 0.$

Com hipóteses mais fortes do que as do Teorema 1.3, o resto de Taylor de ordem n assume uma expressão mais precisa.

Teorema 1.4 *Sejam f uma função com derivada de ordem $n+1$ ($n \in \mathbb{N}_0$) num intervalo aberto I e $a \in I$. Para todo o $x \in I \setminus \{a\}$, existe um ponto c entre a e x, $c \neq a, x$, tal que o resto de Taylor de ordem n é*

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

que se chama resto de Lagrange de ordem n.

Exemplos 8

1. Vamos utilizar a fórmula de MacLaurin de ordem 3 da função $f(x) = \sin x$, com resto de Lagrange, para calcular um valor aproximado de $\sin 20^{\circ} = \sin \frac{\pi}{9}$.

   Tem-se
   $$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + R_3(x), \text{ com } R_3(x) = \frac{\sin c}{4!}x^4 \text{ e } c \in]0, x[.$$
   Fazendo $x = \frac{\pi}{9}$ vem
   $$\sin\frac{\pi}{9} = \frac{\pi}{9} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{9}\right)^3 + R_3\left(\frac{\pi}{9}\right), \quad \text{em que } \left|R_3\left(\frac{\pi}{9}\right)\right| = \left|\frac{\sin c}{4!}\left(\frac{\pi}{9}\right)^4\right| \leq 0.0006.$$
   Assim, $\sin 20^{\circ} \approx \frac{\pi}{9} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{9}\right)^3$, com erro inferior a $\frac{6}{10^4}$.

2. Considere o polinómio $P(x) = 2 + 3x - x^2 + 5x^3$. Como $P^{(4)}(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$, o resto de Lagrange de ordem 3 é nulo e portanto a correspondente fórmula de Taylor no ponto $a = 1$ é

   $$\begin{aligned} P(x) &= P(1) + P'(1)(x-1) + \tfrac{P''(1)}{2!}(x-1)^2 + \tfrac{P'''(1)}{3!}(x-1)^3 = \\ &= 9 + 16(x-1) + 14(x-1)^2 + 5(x-1)^3, \end{aligned}$$

que não é mais do que o desenvolvimento do polinómio $P(x)$ em potências de $(x-1)$.

EXERCÍCIOS 3

1. Escreva os polinómios de Taylor de ordens 1, 2 e 3 de $f(x) = \ln x$ no ponto $a = 1$.

2. Escreva o polinómio de MacLaurin de ordem 3 para cada uma das seguintes funções:

   a) $f(x) = (x-1)^3 + 5(x-1)^2 + 3$ b) $f(x) = xe^x$ c) $f(x) = \sin(\frac{\pi}{2}x)$

   d) $f(x) = \cos x$ e) $f(x) = \operatorname{tg} x$.

3. Use a fórmula de Taylor para escrever o polinómio $P(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 2$ como soma de potências de $x + 2$.

4. a) Escreva o polinómio de Taylor de ordem 2 da função $\sqrt{x}$ no ponto $a = 1$.

   b) Utilize o polinómio da alínea anterior para indicar um valor aproximado de $\sqrt{\dfrac{1}{2}}$.

5. Seja $P_2(x)$ o polinómio de MacLaurin de ordem 2 da função $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$.

   a) Explicite $P_2(x)$.

   b) Justifique que, para valores positivos de x, tem-se $P_2(x) > f(x)$.

6. Seja $f(x) = \sqrt{x+2}$.

   a) Escreva a fórmula de MacLaurin de ordem 1 de f.

   b) Mostre que o gráfico de f está sempre abaixo da recta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 0.

7. Utilize a fórmula de Taylor para mostrar que $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x$, para $x \in]0, \pi[$.

8. Seja $f(x) = 5\ln(1 + x)$.

a) Determine a equação de uma parábola que aproxime o gráfico $y = f(x)$ numa vizinhança de $a = 0$.

b) Justifique que o erro cometido ao aproximar o valor de $f(x)$ no ponto $x = 0.1$ através da parábola obtida na alínea a) é inferior a $\dfrac{5}{3}\,0.1^3$.

9. Considere a função $f(x) = 2\ln(\cos x)$.

a) Determine o polinómio de Taylor de 2º grau que aproxima $f(x)$ para pontos próximos de 0.

b) Prove que o erro cometido pela aproximação definida em a) é inferior a $\frac{4}{3}x^3$ para $x \in]0, \frac{\pi}{4}[$.

1.3 Complementos sobre estudo de funções

No ensino secundário foram estudadas algumas famílias de funções:

· as funções polinomiais, com destaque para as funções afins e quadráticas;

· as funções racionais, evidenciando as funções homográficas;

· as funções potência de expoente racional;

· as funções exponenciais e logarítmicas;

· as funções trigonométricas seno, coseno e tangente.

Vamos agora introduzir as funções arco seno, arco coseno e arco tangente, que são as funções inversas de seno, coseno e tangente, respectivamente. Comecemos por notar que sendo o seno, o coseno e a tangente funções periódicas, não são injectivas. Assim, há que restringir os seus domínios a intervalos nas quais sejam injectivas e como tal invertíveis.

A função arco seno

Ao definir a função inversa do seno é usual restringir o domínio da função seno ao intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, onde esta é estritamente crescente e assume todos os valores do seu contradomínio $[-1, 1]$.

A função inversa de $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$ é

$$\begin{array}{rccc} \arcsin : & [-1,1] & \to & \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ & x & \to & y = \arcsin x \end{array}$$

O símbolo $\arcsin x$ lê-se "arco cujo seno é x" e designa o ângulo do intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ cujo seno é o valor de $x \in [-1, 1]$. Por exemplo, $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$.

O gráfico de $y = \arcsin x$ (ver Figura 1.5), sintetiza as principais propriedades desta função:

- domínio $= [-1, 1]$;
- contradomínio $= \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$;
- contínua e estritamente crescente.

A função arco seno é derivável em $]-1, 1[$. Vamos deduzir a expressão da derivada em cada ponto desse intervalo.

Tendo em conta que $y = \arcsin x \Leftrightarrow x = \sin y$, vamos calcular $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ derivando em ordem a x ambos os membros da 2ª igualdade. Como y é função de x há que recorrer à fórmula de derivação da função composta. Tem-se pois,

$$1 = \cos y \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \overset{(*)}{=} \frac{1}{\cos y} \overset{(**)}{=} \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}}.$$

$(*)$ Usou-se o facto de $\cos y \neq 0$ que decorre de $y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

$(**)$ Para $y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\cos y > 0$ e portanto $\sin^2 y + \cos^2 y = 1 \Leftrightarrow \cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y}$.

Podemos assim concluir que

$$(\arcsin x)' = \frac{\mathrm{d} \arcsin x}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \ x \in]-1, 1[.$$

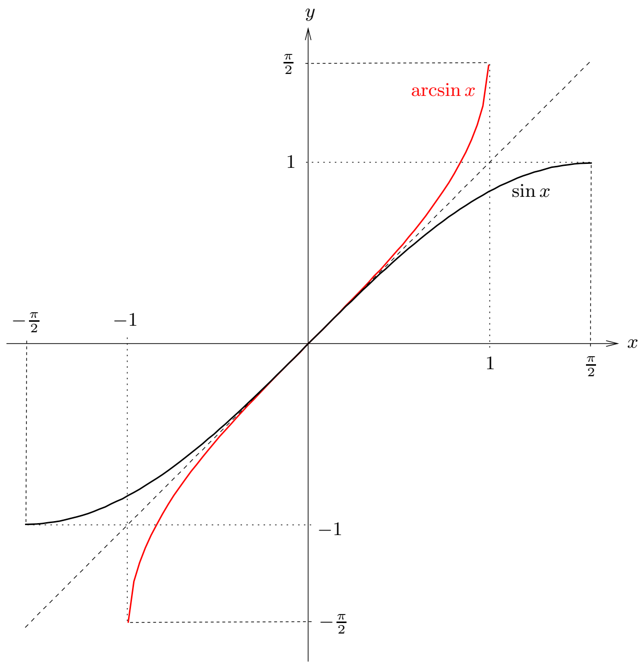


Figura 1.5: Gráficos das funções seno e arco seno.

Aplicando a regra de derivação da função composta, tem-se

$$(\arcsin f(x))' = \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}, \ f(x) \in]-1,1[.$$

Nos pontos $x = 1$ e $x = -1$ a derivada de $\arcsin x$ é $+\infty$.

Exemplo 9 A função composta $y = \arcsin x^3$, definida em $\{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x^3 \leq 1\} = [-1,1]$, tem como derivada

$$(\arcsin x^3)' = \frac{3x^2}{\sqrt{1-x^6}}, \ x \in]-1,1[.$$

A função arco coseno

A função inversa do coseno chama-se arco coseno e, para a sua definição, é usual restringir a função coseno ao intervalo $[0, \pi]$, onde esta é estritamente decrescente e assume todos os valores do seu contradomínio $[-1, 1]$. Tem-se pois

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{arccos}: \; [-1,1] & \to & [0,\pi] \\ x & \to & y = \operatorname{arccos} x \end{array}$$

O símbolo $\operatorname{arccos} x$ lê-se "arco cujo coseno é x" e designa o ângulo do intervalo $[0, \pi]$ cujo coseno é o valor de $x \in [-1, 1]$. Por exemplo, $\operatorname{arccos} \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$.
Assim definida, a função $y = \operatorname{arccos} x$ (ver Figura 1.6) tem as seguintes características:

· domínio $= [-1, 1]$;

· contradomínio $= [0, \pi]$;

· contínua e estritamente decrescente.

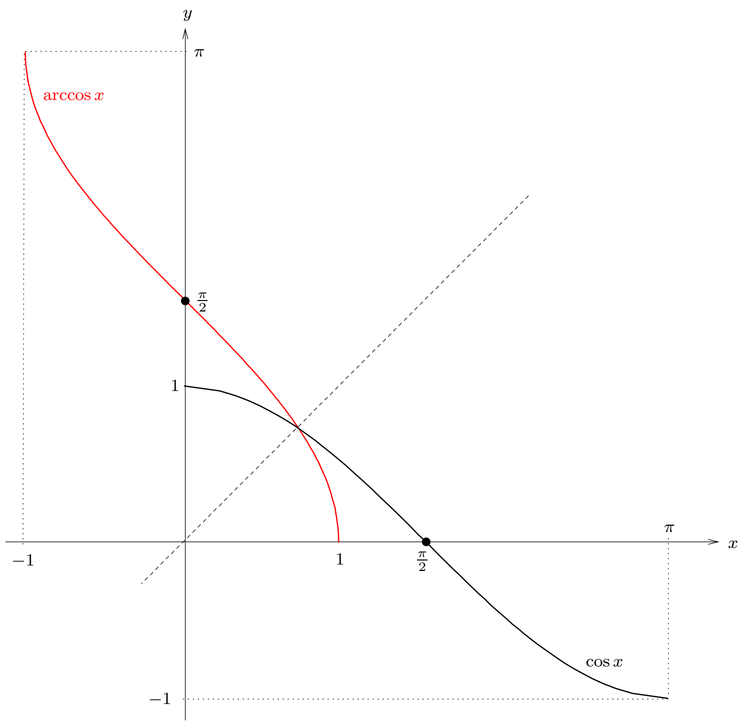


Figura 1.6: Gráficos das funções coseno e arco coseno.

A expressão da derivada do arco coseno, que pode ser obtida de forma análoga à da derivada da função arco seno, é dada por

$$(\arccos x)' = \frac{\mathrm{d} \arccos x}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \ x \in]-1, 1[.$$

A regra de derivação da função composta estabelece que

$$(\arccos f(x))' = -\frac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}, \ f(x) \in]-1, 1[.$$

Nos pontos $x = 1$ e $x = -1$ a derivada de $\arccos x$ é $-\infty$.

Exemplo 10 A função composta $y = \arccos 3x$, definida em $\{x \in \mathbb{R} : -1 \leq 3x \leq 1\} = [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$, tem como derivada

$$(\arccos 3x)' = -\frac{3}{\sqrt{1-9x^2}}, \ x \in]-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}[.$$

A função arco tangente

A função inversa da tangente define-se considerando a função tangente restrita ao intervalo $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, no qual esta é estritamente crescente e assume todos os valores de $\mathbb{R}$. Assim,

$$\begin{aligned} \operatorname{arctg} : \mathbb{R} &\to \ ]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}[\\ x &\to \ y = \operatorname{arctg} x \end{aligned}$$

O símbolo $\operatorname{arctg} x$ lê-se "arco cuja tangente é x" e designa o ângulo do intervalo $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ cuja tangente é o valor de $x \in \mathbb{R}$. Por exemplo, $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$.

A função $y = \operatorname{arctg} x$ (ver Figura 1.7) tem as seguintes características:

- domínio $= \mathbb{R}$;
- contradomínio $=]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$;
- contínua e estritamente crescente;

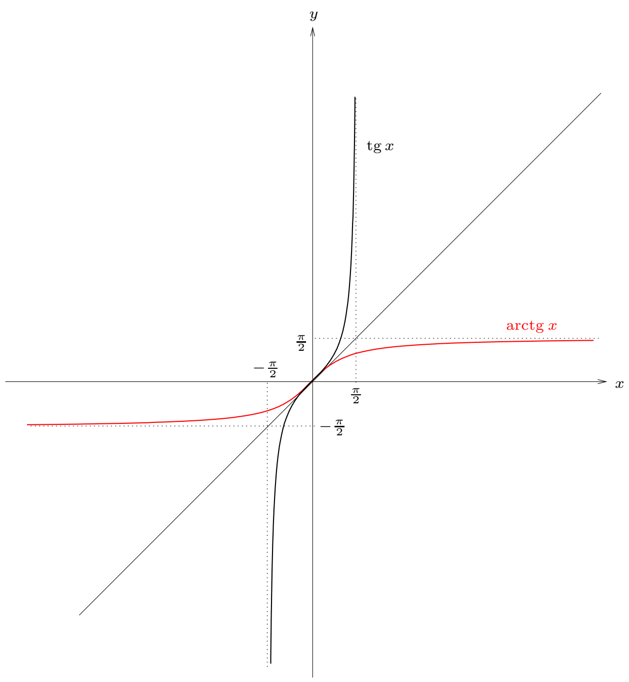


Figura 1.7: Gráficos das funções tangente e arco tangente.

· $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x = \dfrac{\pi}{2}$, $\lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x = -\dfrac{\pi}{2}$, isto é, as rectas $y = \frac{\pi}{2}$ e $y = -\frac{\pi}{2}$ são assimptotas horizontais.

A função arctg é derivável em $\mathbb{R}$ e, por um processo análogo ao que usamos no cálculo de $\arcsin'$, tem-se

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{\mathrm{d} \operatorname{arctg} x}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Usando a regra de derivação da função composta vem

$$(\operatorname{arctg} f(x))' = \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}.$$

Exemplo 11 $(\operatorname{arctg} e^x)' = \frac{e^x}{1+e^{2x}}$.

Observação 2 Por vezes as funções trigonométricas inversas $\arcsin x$, $\arccos x$ e $\operatorname{arctg} x$ são representadas por $\sin^{-1} x$, $\cos^{-1} x$ e $\operatorname{tg}^{-1} x$, respectivamente. Esta notação para a função inversa não deve criar confusões com as funções $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$, $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ e $\operatorname{cotg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$.

Exercícios 4

1. Calcule o valor de cada uma das seguintes expressões:

   a) $\arcsin 1 - \arcsin(-1)$ b) $\operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg}(-1)$ c) $\arcsin(\sin \frac{5}{6}\pi)$

   d) $\cos(\arcsin 0.6)$ e) $\sin(2 \arcsin 0.6)$ f) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} \frac{\pi}{7})$

   g) $\sin(\arcsin 0.123)$.

2. Calcule $\frac{dy}{dx}$:

   a) $y = \arcsin \frac{x-1}{x+1}$ b) $y = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x^2$ c) $y = x(\arcsin x)^2$.

3. Calcule:

   a) $\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right)$ b) $\lim_{x\to 0} \frac{2x}{\operatorname{arctg} x}$ c) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{arctg} x}{1-\cos 2x}$

   d) $\lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$ e) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\arcsin x}{\sin^2 3x}$ f) $\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin(2x)}{\arcsin(3x)}$.

Terminamos este capítulo fazendo notar que a maioria das funções que irão surgir ao longo do curso resultam de somas, produtos, quocientes ou composições de um número finito de funções de entre:

· as funções polinomiais;

· as funções potência;

· as funções exponenciais e logarítmicas;

· as funções trigonométricas seno, coseno, tangente, arco seno, arco coseno e arco tangente.

As funções assim obtidas chamam-se *elementares*. No Anexo 1.2 apresentamos os gráficos de algumas funções elementares.

Exemplos 12 São elementares as funções:

1. $\sin(\ln(1-x^2))$, $x \in]-1,1[$

2. $\text{arctg}\,(\frac{1}{3+x^2})$, $x \in \mathbb{R}$

3. $\sqrt{e^x - 1}$, $x \in [0,+\infty[$

4. $x^x = e^{x \ln x}$, $x \in]0,+\infty[$.

As regras de derivação permitem concluir que as funções elementares são deriváveis e que as suas derivadas são ainda funções elementares.

Exercícios 5

Estude as seguintes funções, indicando para cada uma delas o domínio, assimptotas, intervalos de monotonia e extremos, sentido da concavidade e pontos de inflexão. Esboce o gráfico de cada uma destas funções.

1. $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$
2. $f(x) = \frac{-4}{\sqrt{5x+2}}$
3. $f(x) = x^2|2x-1|$
4. $f(x) = x\ln^2 x$
5. $f(x) = \frac{1}{\ln x - 1}$
6. $f(x) = x + \ln(x^2-1)$
7. $f(x) = e^{-x^2}$
8. $f(x) = \arcsin\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)$
9. $f(x) = x - 2\,\text{arctg}\,(x-1)$
10. $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$
11. $f(x) = \begin{cases} \text{arctg}\,\frac{1}{x} & \text{se } x < 0 \\ 1+e^{x^2} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$.

Anexo 1.1

1) $(k)' = 0$	10) $(\text{tg } f)' = \sec^2 f \cdot f'$
2) $(f^\alpha)' = \alpha \cdot f^{\alpha-1} \cdot f', \qquad \alpha \in \mathbb{R}$	$(\sec f = \frac{1}{\cos f})$
3) $(\mathrm{e}^f)' = \mathrm{e}^f \cdot f'$	11) $(\text{cotg } f)' = -\text{cosec}^2\ f \cdot f'$
4) $(\mathrm{a}^f)' = \mathrm{a}^f \cdot f' \cdot \ln a, \qquad a \in \mathbb{R}^+$	$(\text{cotg } f = \frac{1}{\text{tg } f}$ e $\text{cosec } f = \frac{1}{\sin f})$
5) $(\ln f)' = \frac{f'}{f}$	12) $(\sec f)' = \sec f \cdot \text{tg } f \cdot f'$
6) $(\log_a f)' = \frac{f'}{f \cdot \ln a}, \qquad a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$	13) $(\text{cosec } f)' = -\text{cosec } f \cdot \text{cotg } f \cdot f'$
7) $(f^g)' = g \cdot f^{g-1} \cdot f' + f^g \cdot \ln f \cdot g', \qquad f > 0$	14) $(\arcsin f)' = \frac{f'}{\sqrt{1-f^2}}$
$(f^g = e^{g \ln f})$	15) $(\arccos f)' = \frac{-f'}{\sqrt{1-f^2}}$
8) $(\sin f)' = \cos f \cdot f'$	16) $(\text{arctg } f)' = \frac{f'}{1+f^2}$
9) $(\cos f)' = -\sin f \cdot f'$	

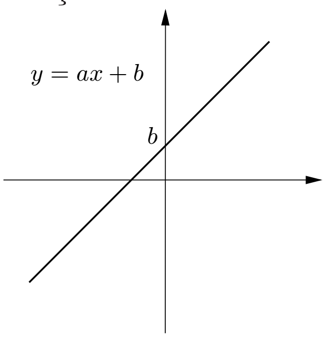
Tabela 1.1: Derivadas de algumas funções elementares.

1) $(f+g)' = f' + g'$
2) $(\alpha f)' = \alpha f', \qquad \alpha \in \mathbb{R}$
3) $(fg)' = f'g + fg'$
4) $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$
5) $(g\ o\ f)'\,(x) = g'\,[f(x)]\,f'(x)$

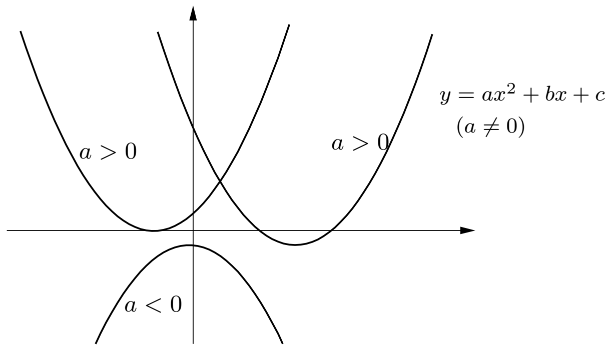
Tabela 1.2: Regras de derivação.

Anexo 1.2

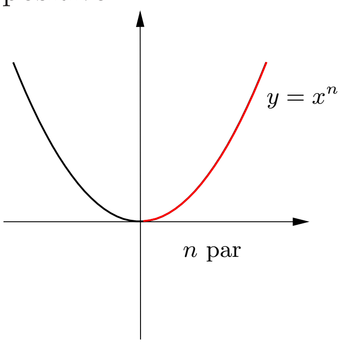
1. Função afim



2. Função quadrática

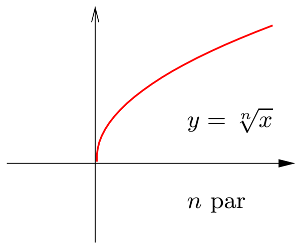


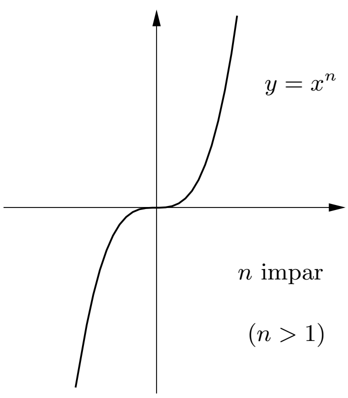
3. Função potência de expoente inteiro positivo

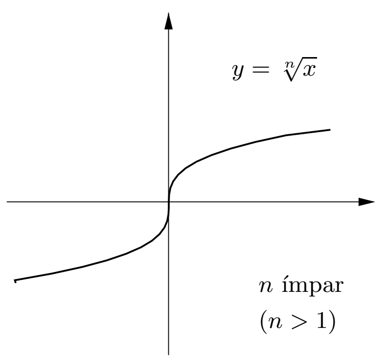


inversa

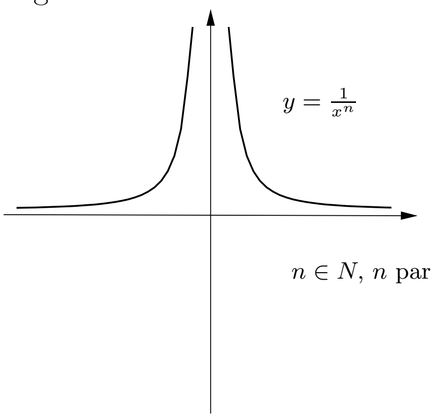
4. Função raiz índice $n \in N$

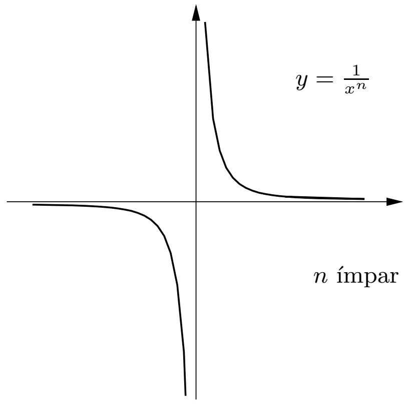






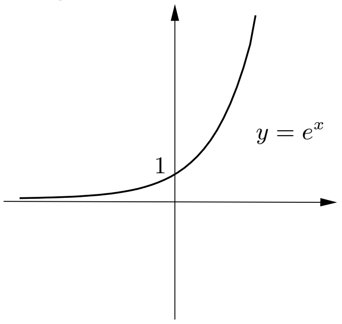
5. Função potência de expoente inteiro negativo



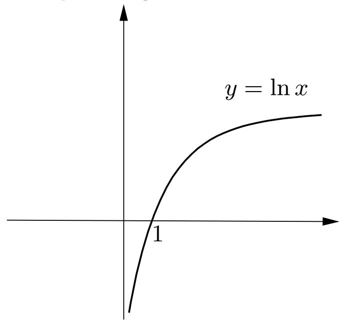


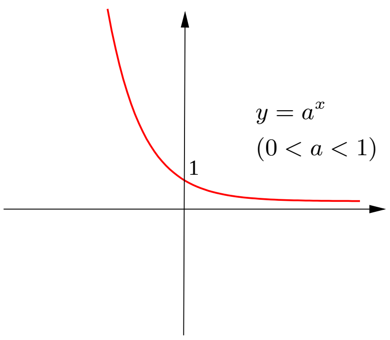
6. Função exponencial

7. Função logarítmica

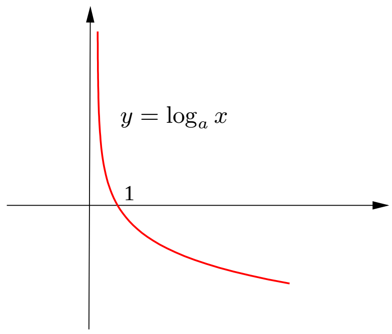


inversa

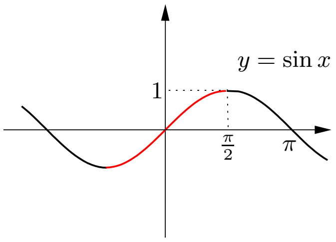




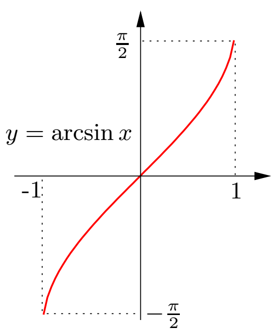
inversa

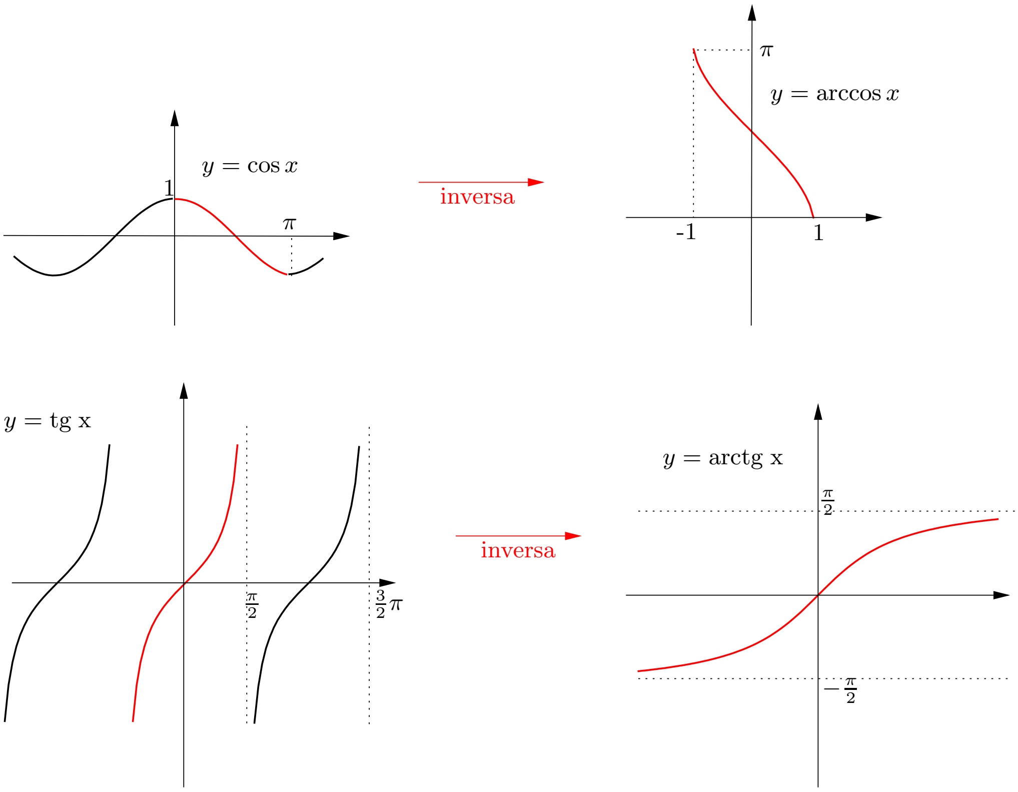


8. Funções trigonométricas



inversa





y = cos x
1
π
inversa
π
y = arccos x
-1
1
y = tg x
π/2
3/2 π
inversa
y = arctg x
π/2
−π/2

Capítulo 2

Primitivação

A primitivação é a operação inversa da derivação. Vamos ocupar-nos da determinação das primitivas de uma função, i.e., das funções que admitem essa função como derivada.

Definição 1 *A função F é uma* primitiva *da função f no intervalo I (com mais do que um ponto) se $F'(x) = f(x),\ \forall x \in\ I$. Para indicar que F é uma primitiva de f é usual escrever-se $F = Pf$ ou $F = \int f$.*

Portanto, tem-se $F = Pf$ sse $F' = f$.
É útil ter presente as seguintes igualdades que ilustram que a primitivação e a derivação são operações inversas.

$$(Pf)' = f \quad \text{e} \quad Pf' = f$$

Exemplos 13

1. $P\,1 = x$ em $\mathbb{R}$, pois $x' = 1$.

2. $P\,x = \frac{x^2}{2}$ em $\mathbb{R}$, pois $(\frac{x^2}{2})' = x$.

3. $P\,x = \frac{x^2}{2} + 3$ em $\mathbb{R}$, pois $(\frac{x^2}{2} + 3)' = x$.

4. $P\,\frac{1}{x} = \ln x$ em $]0, +\infty[$, pois $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

5. $P\,(\cos x\, e^{\sin x}) = e^{\sin x}$ em $\mathbb{R}$, pois $(e^{\sin x})' = (\sin x)' e^{\sin x} = \cos x\, e^{\sin x}$.

6. $P\,\frac{2}{1+4x^2} = \operatorname{arctg} 2x + \sqrt{2}$ em $\mathbb{R}$, pois $(\operatorname{arctg} 2x + \sqrt{2})' = \frac{(2x)'}{1+(2x)^2} = \frac{2}{1+4x^2}$.

Na Tabela 2 figuram primitivas de algumas funções elementares.

Exercícios 6 Calcule

1. $P\,\dfrac{e^x}{1+e^x}$
2. $P\,\dfrac{e^x}{1+e^{2x}}$
3. $P\,\dfrac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}$
4. $P\,\dfrac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$
5. $P\,\dfrac{\cos x}{\sin x}$
6. $P\,\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$
7. $P\,\cos x \sin^2 x$
8. $P\,\dfrac{\sqrt{1+\ln x}}{x}$
9. $P\,\dfrac{1}{x(1+\ln^2 x)}$
10. $P\,\dfrac{1}{x(1+\ln x)}$.

Observações 3 Decorre directamente da definição de primitiva de uma função que, se f é primitivável em I (isto é, existe uma primitiva de f em I), então

1. Existe um número infinito de primitivas de f em I (se $F = Pf$, então $F + C = Pf$, qualquer que seja a constante C). Por exemplo, $\ln x + \sqrt{2}$ e $\ln x + 1$ são ambas primitivas de $\frac{1}{x}$ em $]0, +\infty[$. Qualquer função da forma $\ln x + C$ é uma primitiva de $\frac{1}{x}$ em $]0, +\infty[$.

2. Toda a primitiva de f em I é uma função contínua em I (uma primitiva é uma função derivável e portanto é contínua).

Se F é uma primitiva de f no intervalo I, será que existem outras primitivas de f para além das funções da forma $F + C$? Por exemplo, será que além das primitivas de $\frac{1}{x}$ da forma $\ln x + C$ existirão outras funções F tais que $F'(x) = \frac{1}{x}, \forall x \in]0, +\infty[$? A resposta é dada pelo seguinte teorema.

Teorema 2.1 *Se f é primitivável no intervalo I, quaisquer duas primitivas de f em I diferem de uma constante.*

Demonstração: Se $F = Pf$ e $G = Pf$ em I, tem-se $F' = f$ e $G' = f$ em I. Assim, $F' = G' \Leftrightarrow (F-G)' = 0$ em $I \Leftrightarrow F - G$ é constante em I. $\square$

Portanto, se F é uma qualquer primitiva de f em I, as primitivas de f são as funções da forma $G = F + C$, $\forall C \in \mathbb{R}$. Assim, fixado $x_0 \in I$ e dado um um qualquer $y_0 \in \mathbb{R}$, existe uma única primitiva de f que passa no ponto (x_0, y_0).

Exemplos 14

1. A função $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $G'(x) = x^2$ e $G(0) = 1$ é a primitiva de x^2 que em $x = 0$ assume o valor 1.

   $G(x) = Px^2 = \frac{x^3}{3} + C$, com $G(0) = \frac{0^3}{3} + C = 1 \Rightarrow C = 1$. Portanto, $G(x) = \frac{x^3}{3} + 1$ (ver Figura 2.1).

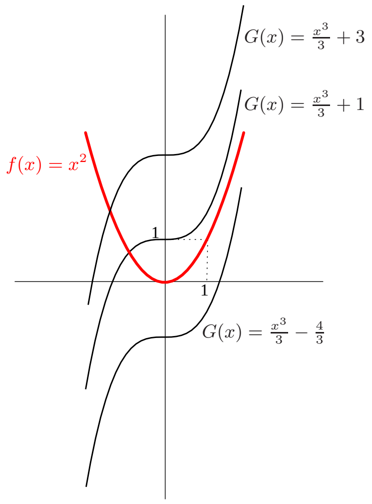


Figura 2.1: Gráficos da função $f(x) = x^2$ e de algumas das suas primitivas.

2. A função $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $G'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ e $\lim_{x \to +\infty} G(x) = \pi$ é a primitiva de $\frac{1}{1+x^2}$ que tende para π quando x tende para $+\infty$.

$G(x) = P\frac{1}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$, com C tal que $\lim_{x \to +\infty} G(x) = \dfrac{\pi}{2} + C = \pi \Rightarrow C = \dfrac{\pi}{2}$.
Tem-se pois $G(x) = \operatorname{arctg} x + \frac{\pi}{2}$.

3. Qual é a função $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfaz $h''(x) = 2x$, $h'(0) = 1$ e $h(0) = 2$?

   A função h é uma primitiva de uma primitiva de $h''(x) = 2x$. Comecemos por determinar a 1ª derivada h'. A função h' é a primitiva de h'' que em $x = 0$ assume o valor 1. Assim, $h'(x) = P2x = x^2 + C$, com $h'(0) = 0^2 + C = 1 \Rightarrow C = 1$ e, portanto, $h'(x) = x^2 + 1$.

   A função h é a primitiva de h' que em $x = 0$ assume o valor 2, i.e., $h(x) = P(x^2+1) = \frac{x^3}{3} + x + D$, com $h(0) = \frac{0^3}{3} + 0 + D = 2 \Rightarrow D = 2$. Tem-se pois $h(x) = \frac{x^3}{3} + x + 2$.

Todas as funções dos exemplos anteriores são primitiváveis. Em que condições é que uma função definida num dado intervalo é primitivável nesse intervalo? O seguinte resultado indica que apenas as funções descontínuas poderão não ser primitiváveis.

Teorema 2.2 *Toda a função contínua no intervalo I é primitivável em I.*

Observação 4 A derivada descreve a taxa de variação instantânea de uma função. Assim, qualquer primitiva $F = \int f$ é uma função cuja variação instantânea coincide com f.
Por exemplo, a velocidade $v = f(t)$ é a taxa de variação da posição de um objecto (a deslocar-se segundo uma dada trajectória) em relação ao tempo. Assim, $P(t) = \int f(t) + C$, com C constante, indica a posição do objecto, que se desloca àquela velocidade, em função do tempo.
Se $v = at + v_0$ (movimento uniformemente acelerado), tem-se

$$P(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + C.$$

Se considerarmos o movimento a partir de um dado instante, digamos $t = 0$, i.e., se admitirmos que $P(0) = 0$, a constante C na expressão anterior vem igual a 0.

Vamos agora apresentar algumas propriedades que vão ser úteis no cálculo das primitivas de muitas funções. As duas primeiras são consequências imediatas das regras de derivação da soma e do produto escalar de funções.

Proposição 2.3 *Se f e g são funções primitiváveis em I, a função $f+g$ é primitivável em I e $P(f+g) = Pf + Pg$.*

Exemplos 15

1. $P(x^3+x+1) = Px^3 + Px + P1 = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + x$.

2. $P\frac{2x+1}{x^2+1} = P\frac{2x}{x^2+1} + P\frac{1}{x^2+1} = \ln(x^2+1) + \operatorname{arctg} x$.

3. $P\mathrm{tg}^2 x = P(\sec^2 x - 1) = P\sec^2 x - P1 = \operatorname{tg} x - x$.

Proposição 2.4 *Se f é primitivável em I e λ é um número real, a função λf é primitivável em I e $P(\lambda f) = \lambda Pf$.*

Exemplos 16

1. $P(-3x) = -3Px = -\frac{3}{2}x^2$.

2. $P\frac{x}{x^2+1} = P\frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+1} = \frac{1}{2}P\frac{2x}{x^2+1} = \frac{1}{2}\ln(x^2+1)$.

3. $P(3x^2 - 4\cos 2x) = 3Px^2 - 2P(2\cos 2x) = x^3 - 2\sin 2x$.

As duas propriedades seguintes resultam directamente das regras de derivação do produto e da composição de funções, respectivamente.

Proposição 2.5 *(Primitivação por partes.) Sejam f e g funções definidas no intervalo I, f primitivável ($F = Pf$) e g derivável em I. Tem-se*

$$P(fg) = Fg - P(Fg'),$$

desde que $P(Fg')$ exista.

Exemplos 17

1. $P(x\sin x) = xP\sin x - P(P(\sin x)x') = -x\cos x - P(-\cos x) = -x\cos x + \sin x.$

   Note que teria sido infeliz a escolha de x para f e $\sin x$ para g na fórmula da primitivação por partes. Dessa escolha resultaria $P(x\sin x) = \frac{x^2}{2}\sin x - P(\frac{x^2}{2}\cos x)$, sendo o cálculo de $P(\frac{x^2}{2}\cos x)$ um desafio mais complexo do que o da primitiva inicial.

2. $P\ln x \overset{(*)}{=} P(1\ln x) = x\ln x - P(x\frac{1}{x}) = x\ln x - x.$

   $(*)$ Este artifício é muitas vezes utilizado.

3. $P\sin^3 x = P(\sin x\sin^2 x) = -\sin^2 x\cos x + P(\cos x\, 2\sin x\cos x) = -\sin^2 x\cos x + 2P(\sin x\cos^2 x) = -\sin^2 x\cos x - \frac{2}{3}\cos^3 x.$

4. $P(e^x\sin x) = e^x\sin x - P(e^x\cos x) = e^x\sin x - (e^x\cos x + P(e^x\sin x)) = e^x\sin x - e^x\cos x - P(e^x\sin x).$

   A equação $P(e^x\sin x) = e^x\sin x - e^x\cos x - P(e^x\sin x)$ acima estabelecida vai permitir calcular $Pe^x\sin x$.

   De facto, $P(e^x\sin x) = e^x\sin x - e^x\cos x - P(e^x\sin x) \Leftrightarrow 2P(e^x\sin x) = e^x(\sin x - \cos x) \Leftrightarrow P(e^x\sin x) = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x).$

   Repare que para calcular $Pe^x\cos x$, se tivessemos escolhido $\cos x$ para primitivar e e^x para derivar, não faríamos mais do que desfazer as operações já efectuadas.

Observação 5 Como fica claro dos exemplos anteriores, o sucesso deste método de primitivação é condicionado, em parte, pela possibilidade de identificar uma factorização fg da função a primitivar, em que $F = Pf$ seja conhecida.

Exercícios 7

Calcule uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

1. xe^x
2. $x \ln x$
3. $\operatorname{arctg} x$
4. $x^2 \sin x$
5. $\ln(x^2+1)$.

Proposição 2.6 *(Primitivação por substituição.) Sejam I e J dois intervalos, f uma função primitivável em I e $\varphi : J \to I$ uma bijecção derivável. Então,*

$$Pf(x) = P(f(\varphi(t))\varphi'(t))|_{t=\varphi^{-1}(x)},$$

em que a notação $P(f(\varphi(t))\varphi'(t))|_{t=\varphi^{-1}(x)}$ significa que, após a primitivatação, t é substituído por $\varphi^{-1}(x)$.

Exemplos 18

1. $f(x) = \dfrac{1}{1+e^x},\ x \in \mathbb{R}$.

   Fazendo $e^x = t \Rightarrow x = \ln t = \varphi(t),\ t \in J =]0,+\infty[$, vem $x' = \varphi'(t) = \frac{1}{t}$.

   Note que $\varphi(t) = \ln t :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ é bijectiva e derivável.

$$\begin{aligned} Pf(x) &= P(f(\varphi(t))\varphi'(t))|_{t=\varphi^{-1}(x)} = P(\frac{1}{1+t}\,\frac{1}{t})|_{t=e^x} = \\ &= P(-\frac{1}{1+t} + \frac{1}{t})|_{t=e^x} = (-\ln(1+t) + \ln t)|_{t=e^x} = \\ &= -\ln(1+e^x) + x. \end{aligned}$$

2. $f(x) = \cos\sqrt{x},\ x \in [0,+\infty[$.

   Com $\sqrt{x} = t \Rightarrow x = t^2 = \varphi(t),\ t \in [0,+\infty[$, tem-se $x' = \varphi'(t) = 2t$.

$$\begin{aligned} Pf(x) &= P(f(\varphi(t))\varphi'(t))|_{t=\varphi^{-1}(x)} = P(2t\cos t)|_{t=\sqrt{x}} = \\ &= (2t\sin t - 2P\sin t)|_{t=\sqrt{x}} = (2t\sin t + 2\cos t)|_{t=\sqrt{x}} = \\ &= 2\sqrt{x}\sin\sqrt{x} + 2\cos\sqrt{x}. \end{aligned}$$

3. $f(x) = \sqrt{1-x^2},\ x \in [-1,1]$.

Fazendo $x = \sin t = \varphi(t),\ t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, vem $x' = \varphi'(t) = \cos t$.

$$\begin{aligned} Pf(x) &= P(f(\varphi(t))\varphi'(t))|_{t=\varphi^{-1}(x)} = P(\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t)|_{t=\arcsin x} = \\ &= P\cos^2 t|_{t=\arcsin x} = P\frac{1}{2}(1+\cos 2t)|_{t=\arcsin x} = \\ &= \frac{1}{2}(t + \frac{1}{2}\sin 2t)|_{t=\arcsin x} = \frac{1}{2}(t+\sin t\cos t)|_{t=\arcsin x} = \\ &= \frac{1}{2}(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}). \end{aligned}$$

Repare que $\cos t = \pm\sqrt{1-\sin^2 t}$ (a partir da fórmula $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$). Quando $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\cos t = \sqrt{1-\sin^2 t}$ porque $\cos t \geq 0$.

Exercícios 8

Calcule uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

1. $\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x^3}}$
2. $\sin(\ln x)$
3. $\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$
4. $\dfrac{e^{2x}}{1+e^x}$
5. $\dfrac{e^{2x}}{\sqrt{1-e^{2x}}}$.

A primitivação de funções racionais requer uma atenção especial.

Uma função racional é *própria* se o grau do polinómio do denominador é maior do que o do numerador. Uma função racional não própria diz-se *imprópria*.

A função racional $\frac{x^2+2x-1}{x^3-x^2+x-1}$ é própria e $\frac{x^3-3x^2+4}{x^3-5x^2+8x-4}$ e $\frac{x^5}{x^2-5x+6}$ são impróprias.

Teorema 2.7 *Toda a função racional pode ser decomposta na soma de um polinómio e uma função racional própria.*

O exemplo seguinte mostra como esta decomposição pode ser feita.

Exemplo 19

$R(x) = \dfrac{2x^3-x}{x^2-5x+6}$.

$$
\begin{array}{rl|l}
2x^3 & \quad - \; x & x^2 - 5x + 6 \\ \cline{3-3}
\underline{-2x^3 + 10x^2 - 12x} & & 2x + 10 \\
10x^2 - 13x & & \\
\underline{\quad - 10x^2 + 50x - 60} & & \\
37x - 60 & &
\end{array}
$$

Assim, $2x^3 - x = (2x + 10)(x^2 - 5x + 6) + 37x - 60$ e, portanto,

$$R(x) = 2x + 10 + \frac{37x - 60}{x^2 - 5x + 6}.$$

Uma vez que primitivar polinómios não oferece qualquer dificuldade, basta saber primitivar funções racionais próprias para calcular as primitivas de qualquer função racional. De facto, como veremos mais à frente, basta apenas saber primitivar certos tipos de funções racionais próprias chamadas fracções simples.

Definição 2 *Chama-se* fracção simples *a uma função racional própria do tipo* $\frac{a}{(x-\alpha)^k}$ *ou* $\frac{Ax+B}{((x-p)^2+q^2)^k}$ [1] *, em que* $a, \alpha, A, B, p, q \in \mathbb{R}$ *e* $k \in \mathbb{N}$.

As fracções simples $\frac{a}{(x-\alpha)^k}$ admitem as seguintes primitivas:

$$P\frac{a}{(x-\alpha)^k} = \begin{cases} a \ln|x-\alpha| & \text{se } k = 1 \\ a\,\frac{(x-\alpha)^{-k+1}}{-k+1} & \text{se } k > 1 \end{cases}.$$

Exemplos 20

1. $P\,\dfrac{2}{x+5} = 2\,\ln|x+5|$.

2. $P\,\dfrac{5}{(x-2)^3} = 5\,P\,(x-2)^{-3} = -\dfrac{5}{2}\dfrac{1}{(x-2)^2}$.

[1] Todo o polinómio de grau 2 de raízes complexas $p \pm iq$ se escreve como o produto de uma constante por $(x-p)^2 + q^2$.

As primitivas de

$$\frac{Ax+B}{((x-p)^2+q^2)^k} \tag{2.1}$$

têm expressões mais complicadas, que se obtêm com a substituição $x = p + qt$.

Exemplo 21 $P\dfrac{x+2}{(x+1)^2+4}$.
Fazendo a substuição $x = -1 + 2t$, vem

$$\begin{aligned} P\frac{x+2}{(x+1)^2+4} &= P\,2\,\frac{1+2t}{4t^2+4}\Big|_{t=\frac{x+1}{2}} = \\ &= \frac{1}{2}\,P(\frac{1}{t^2+1}+\frac{2t}{t^2+1})\Big|_{t=\frac{x+1}{2}} = \frac{1}{2}\,(\,\mathrm{arctg}\,t+\ln(t^2+1))\Big|_{t=\frac{x+1}{2}} = \\ &= \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x+1}{2}+\frac{1}{2}\,\ln\left((\frac{x+1}{2})^2+1\right). \end{aligned}$$

Para valores de $k > 1$ o cálculo da primitiva obtem-se a partir da substituição $x = p + qt$ e utilizado a fórmula de recorrência

$$P\frac{1}{(t^2+1)^k} = \frac{t}{2k-2}\frac{1}{(t^2+1)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2k-2}P\frac{1}{(t^2+1)^{k-1}}.$$

Na tabela 2.2 figuram as primitivas de (2.1) para $k = 1, 2$.

Teorema 2.8 *Toda a função racional própria pode ser decomposta na soma de fracções simples. Se* $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ *é uma função racional própria,*

1. *Cada raíz real* α *de* $Q(x)$ *de multiplicidade* k *dá origem à soma das* k *fracções simples:* $\frac{a_1}{(x-\alpha)^k}, \frac{a_2}{(x-\alpha)^{k-1}}, \ldots, \frac{a_k}{x-\alpha}$.

2. *Cada par de raízes complexas* $p \pm iq$ *de* $Q(x)$ *de multiplicidade* k *dá origem à soma das* k *fracções simples:* $\frac{A_1x+B_1}{((x-p)^2+q^2)^k}, \frac{A_2x+B_2}{((x-p)^2+q^2)^{k-1}}, \ldots, \frac{A_kx+B_k}{(x-p)^2+q^2}$.

Os exemplos seguintes mostram como esta decomposição pode ser feita.

Exemplos 22

1. $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{1}{x^3 + x}$.

   As raízes de $Q(x) = x^3 + x = x(x^2 + 1)$ são 0 com multiplicidade 1 e $\pm i$ com multiplicidade 1. Usando o Teorema 2.8, tem-se

   $$\frac{1}{x^3 + x} = \frac{a}{x} + \frac{Ax + B}{x^2 + 1}.$$

   Os coeficientes a, A e B podem ser determinados pelo método dos coeficientes indeterminados:

   $$\begin{aligned}
   \frac{1}{x^3 + x} = \frac{a}{x} + \frac{Ax + B}{x^2 + 1} \quad &\Rightarrow \quad 1 = a(x^2 + 1) + (Ax + B)x \Leftrightarrow \\
   &\Leftrightarrow \quad 1 = ax^2 + a + Ax^2 + Bx \Leftrightarrow \\
   &\Leftrightarrow \quad 1 = (a + A)x^2 + Bx + a \Leftrightarrow \\
   &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a + A & = 0 \\ \qquad B & = 0 \\ a & = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A & = -1 \\ B & = 0 \\ a & = 1 \end{cases}.
   \end{aligned}$$

   Portanto, $R(x) = \dfrac{1}{x^3 + x} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{x^2 + 1}$ e assim

   $$PR(x) = P\frac{1}{x^3 + x} = P\frac{1}{x} - P\frac{x}{x^2 + 1} = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2 + 1).$$

2. $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{2x^2 - 5}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4}$.

   1 é uma raíz de $Q(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = (x - 1)T(x)$.

   $$\begin{array}{c|cccc}
    & 1 & -5 & 8 & -4 \\
   1 & & 1 & -4 & 4 \\
   \hline
    & 1 & -4 & 4 & \underline{|\,0}
   \end{array}$$

   Assim, $x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = (x - 1)T(x) = (x - 1)(x^2 - 4x + 4) = (x - 1)(x - 2)^2$.

   Portanto, as raízes de $Q(x)$ são 1 com multiplicidade 1 e 2 com multiplicidade 2. Pelo Teorema 2.8 tem-se

$$\frac{2x^2-5}{x^3-5x^2+8x-4} = \frac{a}{x-1} + \frac{b_1}{(x-2)^2} + \frac{b_2}{x-2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x^2-5 = a(x-2)^2 + b_1(x-1) + b_2(x-1)(x-2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^2-5 = ax^2 - 4ax + 4a + b_1x - b_1 + b_2x^2 - 2b_2x - b_2x + 2b_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^2-5 = (a+b_2)x^2 + (-4a+b_1-3b_2)x + 4a - b_1 + 2b_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \quad + b_2 = 2 \\ -4a + b_1 - 3b_2 = 0 \\ 4a - b_1 + 2b_2 = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b_1 = 3 \\ b_2 = 5 \end{cases}.$$

Portanto, $R(x) = \dfrac{2x^2-5}{x^3-5x^2+8x-4} = -\dfrac{3}{x-1} + \dfrac{3}{(x-2)^2} + \dfrac{5}{x-2}$ e

$$\begin{aligned} PR(x) &= P\frac{2x^2-5}{x^3-5x^2+8x-4} = \\ &= P - \frac{3}{x-1} + P\frac{3}{(x-2)^2} + P\frac{5}{x-2} \\ &= -3\ln|x-1| - \frac{3}{x-2} + 5\ln|x-2|. \end{aligned}$$

Exercícios 9

Calcule uma primitiva de cada uma das seguintes funções racionais:

1. $\dfrac{1}{(x-4)^5}$ 2. $\dfrac{x+16}{(x-1)^2}$ 3. $\dfrac{x^2+1}{x(x-1)^2}$ 4. $\dfrac{x^3+1}{x^3-x^2}$

Terminamos este capítulo com exemplos de funções cuja primitivação pode reduzir-se à de funções racionais mediante uma substituição adequada de variável. (Na Tabela 2.5 são sugeridas substituições para a racionalização de algumas funções.)

Exemplos 23

1. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}(\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x})}$, $x \in [0,+\infty[$.

Fazendo a mudança de variável $x = t^{12} = \varphi(t)$, tem-se $x' = \varphi'(t) = 12\, t^{11}$ e

$$\begin{aligned}
Pf(x) &= P(f(\varphi(t))\varphi'(t))|_{t=\varphi^{-1}(x)} = P\frac{12t^{11}}{t^6(t^4+t^3)}|_{t=\sqrt[12]{x}} = \\
&= 12P\frac{t^2}{t+1}|_{t=\sqrt[12]{x}} \overset{(*)}{=} 12P(t-1+\frac{1}{t+1})|_{t=\sqrt[12]{x}} = \\
&= 12(\frac{t^2}{2} - t + \ln|t+1|)|_{t=\sqrt[12]{x}} = (6t^2 - 12t + 12\ln|t+1|)|_{t=\sqrt[12]{x}} = \\
&= 6\sqrt[12]{x^2} - 12\sqrt[12]{x} + 12\ln(\sqrt[12]{x}+1).
\end{aligned}$$

$$(*)\qquad \begin{array}{rl}
t^2 & \underline{|t+1} \\
\underline{-t^2-t} & t-1 \\
-t & \\
\underline{t+1} & \\
1 &
\end{array}$$

Assim, $t^2 = (t+1)(t-1)+1$ e, portanto, $\dfrac{t^2}{t+1} = t-1+\dfrac{1}{t+1}$.

2. $f(x) = \dfrac{1-\sin x}{1+\cos x}$.

   Fazendo $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = t$ ($\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2},\ \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$), tem-se

   $x = 2\operatorname{arctg} t = \varphi(t),\ x' = \varphi'(t) = \dfrac{2}{1+t^2}$ e assim

$$\begin{aligned}
Pf(x) &= P(f(\varphi(t))\varphi'(t))|_{t=\varphi^{-1}(x)} = P\frac{1-\frac{2t}{1+t^2}}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}|_{t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}} = \\
&= P\frac{1+t^2-2t}{1+t^2}|_{t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}} = P(1-\frac{2t}{1+t^2})|_{t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}} = \\
&= (P1 - P\frac{2t}{1+t^2})|_{t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}} = (t - \ln(1+t^2))|_{t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}} = \\
&= \operatorname{tg}\frac{x}{2} - \ln(1+(\operatorname{tg}\frac{x}{2})^2).
\end{aligned}$$

Observação 6 É de referir a existência de muitas funções elementares que, uma vez que são contínuas, são também primitiváveis, mas que os métodos aqui apresentados não conseguem primitivar. Tal deve-se a que, contrariamente com o que acontece com a derivação, nem sempre as primitivas de funções elementares são elementares. Estão nesta situação as funções e^{-x^2}, $\frac{sin x}{x}$, $\frac{1}{\ln x}$.

Exercícios 10

1. Mostre que

a) $P \text{ arctg } x = x \text{ arctg } x - \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)$

b) $P - \dfrac{x}{4-x^2+\sqrt{4-x^2}} = \ln(\sqrt{4-x^2}+1)$

c) $P\,\dfrac{x}{\sqrt{ax+b}} = \dfrac{2}{3a^2}(ax-2b)\sqrt{ax+b}$, com $a, b \in \mathbb{R}$

2. Calcule uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

a) $\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ b) $e^x \sin e^x$ c) $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^4}}$

d) $\ln(\cos x)\text{ tg } x$ e) $x\sqrt{1-x^2}$ f) $\dfrac{\sqrt{\ln x}}{x}$

g) $\dfrac{\sin x}{3-2\cos x}$ h) $\dfrac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}$ i) $\dfrac{1+\sin x}{\cos^2 x}$

j) $\dfrac{1}{1+e^{-x}}$ k) $\dfrac{e^{2x}}{1+e^{4x}}$ l) $\dfrac{1}{x\sqrt{\ln x}}$

m) $\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ n) $(e^x+2)^2$ o) $\dfrac{x}{e^x}$

p) $x\sec^2 x$ q) $\sqrt{x}\ln x$ r) xe^{2x}

s) $x\sin\frac{x}{2}$ t) $\ln(x^3)$ u) $x\text{arctg } x$

v) $\cos(\ln x)$ x) $\dfrac{x^4}{1-x}$ y) $\dfrac{1}{x^2+3x-10}$

w) $\dfrac{x-3}{x^3+x^2}$ I) $\dfrac{x}{(x-1)^2}$ II) $\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{x}}$

III) $\dfrac{e^{2x}+2e^{3x}}{1-e^x}$ IV) $\dfrac{1}{\sqrt{e^x+1}}$ V) $\dfrac{e^{3x}}{\sqrt{e^x+1}}$

VI) $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$ VII) $\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$

3. Determine a função f duas vezes derivável em $\mathbb{R}^+$ e que verifica as seguintes

condições:

$$f''(x) = \frac{1}{x^2} + e^{-x}, \qquad f'(1) = -1 \qquad \text{e} \qquad \mathrm{f}(1) = \frac{2}{\mathrm{e}}.$$

4. Uma população de bactérias cresce à taxa de $N'(t) = 2^t$ milhões de bactérias por hora, onde $N(t)$ denota o número de bactérias ao fim de t horas. Se $N(0)$=14 (milhões), determine uma expressão para $N(t)$ e calcule a dimensão da população ao fim de 2 horas.

5. Após uma substância estranha ser introduzida no sangue de um dado animal, são produzidos anticorpos à taxa $f(t) = \frac{t}{t^2+1}$ milhares de anticorpos por minuto. Determine o número de anticorpos no sangue ao fim de 4 minutos, sabendo que no instante $t = 0$ não há anticorpos.

Anexo 2.1

	Função a primitivar	Primitiva
1)	$k,\ k \in \mathbb{R}$	kx
2)	$f^{\alpha} \cdot f',\ \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	$\dfrac{f^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
	$x^{\alpha},\ \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
3)	$\frac{f'}{f}$	$\ln\lvert f\rvert$
	$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$
4)	$\sin f \cdot f'$	$-\cos f$
5)	$\cos f \cdot f'$	$\sin f$
6)	$\text{tg } f \cdot f'$	$-\ln\lvert\cos f\rvert$
7)	$\text{cotg } f \cdot f'$	$\ln\lvert\sin f\rvert$
8)	$\sec^2 f \cdot f'$	$\text{tg } f$
9)	$\text{cosec}^2 f \cdot f'$	$-\text{cotg } f$
10)	$\sec f \cdot f'$	$\ln\lvert\sec f + \text{tg } f\rvert$
11)	$\text{cosec } f \cdot f'$	$\ln\lvert\text{cosec } f - \text{cotg } f\rvert$
12)	$\sec f \cdot \text{tg } f \cdot f'$	$\sec f$
13)	$\text{cosec } f \cdot \text{cotg } f \cdot f'$	$-\text{cosec } f$
14)	$a^f \cdot f',\ a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$	$\dfrac{a^f}{\ln a}$
15)	$e^f \cdot f'$	e^f
16)	$\dfrac{f'}{\sqrt{1-f^2}}$	$\arcsin f$
17)	$\dfrac{-f'}{\sqrt{1-f^2}}$	$\arccos f$
18)	$\dfrac{f'}{1+f^2}$	$\text{arctg } f$

Tabela 2.1: Primitivas de algumas funções.

Fracção simples a primitivar $\frac{Ax+B}{((x-p)^2+q^2)^k}$	Primitiva
1) $k=1$	$\frac{Ap+B}{q}\operatorname{arctg}\frac{x-p}{q}+\frac{A}{2}\ln((x-p)^2+q^2)$
2) $k=2$	$\frac{Ap+B}{2q^2}\left(\frac{q(x-p)}{(x-p)^2+q^2}+\operatorname{arctg}\frac{x-p}{q}\right)-\frac{A}{2((x-p)^2+q^2)}$

Tabela 2.2: Primitivas de algumas fracções simples.

1)	$P(f+g)=Pf+Pg$
2)	$P\lambda f=\lambda Pf,\ \text{ com } \lambda\in\mathbb{R}$
3)	$P\,(fg)=Fg-P\,(Fg'),\ \text{ com } F=Pf$
4)	$Pf(x)=P(f(\varphi(t))\varphi'(t)),\ \text{ com } x=\varphi(t)$

Tabela 2.3: Propriedades das primitivas.

1)	$\sin^2 x+\cos^2 x=1$		
2)	$1+\operatorname{tg}^2 x=\sec^2 x$	3)	$1+\operatorname{cotg}^2 x=\operatorname{cosec}^2 x$
4)	$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\sin y\cos x$	5)	$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$
6)	$\sin(x-y)=\sin x\cos y-\sin y\cos x$	7)	$\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y$
8)	$\sin 2x=2\sin x\cos x$	9)	$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$
10)	$\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$	11)	$\cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x)$
12)	$\sin x=\dfrac{2\operatorname{tg} x/2}{1+\operatorname{tg}^2 x/2}$	13)	$\cos x=\dfrac{1-\operatorname{tg}^2 x/2}{1+\operatorname{tg}^2 x/2}$
14)	$\sin mx\cos nx=\frac{1}{2}[\sin(m+n)x+\sin(m-n)x]$		
15)	$\cos mx\cos nx=\frac{1}{2}[\cos(m+n)x+\cos(m-n)x]$	16)	$\sin mx\sin nx=\frac{1}{2}[\cos(m-n)x+\cos(m+n)x]$

Tabela 2.4: Fórmulas trigonométricas que poderão ser úteis na primitivação.

Função a primitivar	Substituição
1) $R\left(x, \sqrt{a^2 - b^2x^2}\right)$	$x = \frac{a}{b}\sin t$
2) $R\left(x, \sqrt{a^2 + b^2x^2}\right)$	$x = \frac{a}{b}\text{tg } t$
3) $R\left(x, \sqrt{b^2x^2 - a^2}\right)$	$x = \frac{a}{b}\sec t$
4) $R\left(x, x^{\frac{p}{q}}, \ldots, x^{\frac{r}{s}}\right)$ com $p, q, \ldots, r, s \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$	$x = t^k,\ k = m.m.c.(q, \ldots, s)$
5) $R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p}{q}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r}{s}}\right)$	$\frac{ax+b}{cx+d} = t^k,\ k = m.m.c.(q, \ldots, s)$
com $p, q, \ldots, r, s \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$	$\left(x = \frac{dt^k - b}{a - ct^k}\right)$
7) $R(\sin x, \cos x)$	$t = \text{tg}\frac{x}{2}$
	$\left(\sin x = \frac{2t}{1+t^2},\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)$
8) $R(e^x)$	$x = \ln t$

Tabela 2.5: Substituições sugeridas para racionalizar $R(v_1, \ldots, v_m) = \dfrac{P(v_1, \ldots, v_m)}{Q(v_1, \ldots, v_m)}$, em que $P(v_1, \ldots, v_m)$ e $Q(v_1, \ldots, v_m)$ são polinómios nas variáveis $v_1, \ldots, v_m$.

Capítulo 3

Cálculo integral

3.1 Integral definido

Introdução

Historicamente o conceito de integral nasce para definir rigorosamente a noção intuitiva de área de regiões limitadas por curvas. Assim, uma das vias mais naturais para motivar o conceito de integral é precisamente o cálculo de áreas. Dada uma função $f \geq 0$ em $[a, b]$ e limitada nesse intervalo, qual será a área da região R delimitada superiormente pelo gráfico de f, inferiormente pelo eixo dos xx e lateralmente pelas rectas $x = a$ e $x = b$? (Ver Figura 3.1.)

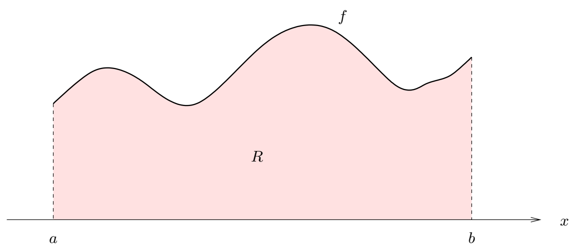


Figura 3.1: R é a região delimitada superiormente pelo gráfico de f, inferiormente pelo eixo dos xx e lateralmente pelas rectas $x = a$ e $x = b$.

Para obter um valor aproximado da área da região R é razoável proceder da seguinte forma. (A Figura 3.2 ilustra este processo.) Consideremos $n+1$ pontos $a = x_0 <$

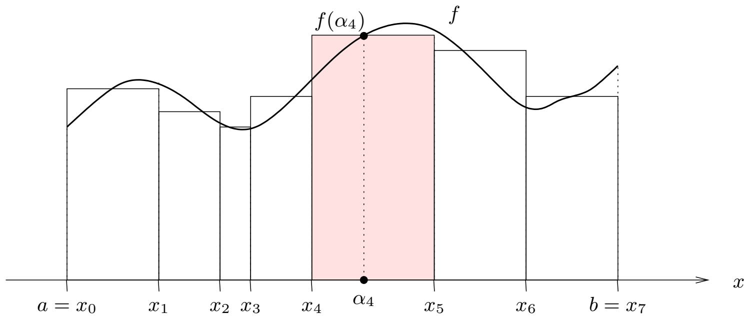


Figura 3.2: A soma das áreas dos rectângulos assinalados é um valor aproximado da área da região R da Figura 3.1.

$x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ do intervalo $[a, b]$ e em cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ vamos escolher um ponto arbitrário α_i. O produto $A_i = f(\alpha_i)(x_i - x_{i-1})$ é a área do rectângulo de base $[x_{i-1}, x_i]$ e altura igual a $f(\alpha_i)$. Se considerarmos que cada A_i é uma aproximação razoável da área da região de R delimitada inferiormente pelo intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, então a soma $A_1 + A_2 + \cdots + A_n$ é um valor aproximado da área de R. É claro que a aproximação será tanto melhor quanto menor forem as amplitudes dos intervalos $[x_{i-1}, x_i]$. Assim, vamos obter sucessivos aumentos da precisão aumentando o número n de pontos e distribuindo-os de forma a que os comprimentos dos intervalos $[x_{i-1}, x_i]$ tendam para zero. Claro que há inúmeras maneiras de seleccionar mais e mais pontos e de os distribuir no intervalo $[a, b]$ de forma a que as amplitudes dos intervalos $[x_{i-1}, x_i]$ sejam cada vez menores. Se independentemente da forma de o fazer, as correspondentes somas $A_1 + A_2 + \cdots + A_n$ convergem para o mesmo valor S, diz-se que a função f é *integrável* em $[a, b]$, que S é o *integral definido* de f em $[a, b]$ e escreve-se

$$S = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f.$$

É este o valor que define rigorosamente a área de R.

Na expressão anterior $[a, b]$ é o *intervalo de integração*, os pontos a e b são os *limites de integração*, f é a *função integranda* e x é a *variável de integração*.

Exemplo 24 Se $f(x) = k \geq 0$ em $[a, b]$, $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = k(b - a)$ é a área do rectângulo de base $[a, b]$ e altura k.

Se $f \leq 0$ em $[a, b]$, então as somas $A_1 + A_2 + \cdots + A_n$ são não positivas e portanto o integral $\int_a^b f$ será também não positivo, sendo o simétrico da área da região delimitada inferiormente pelo gráfico de f, superiormente pelo eixo dos xx e lateralmente pelas rectas $x = a$ e $x = b$ (ver Figura 3.3).

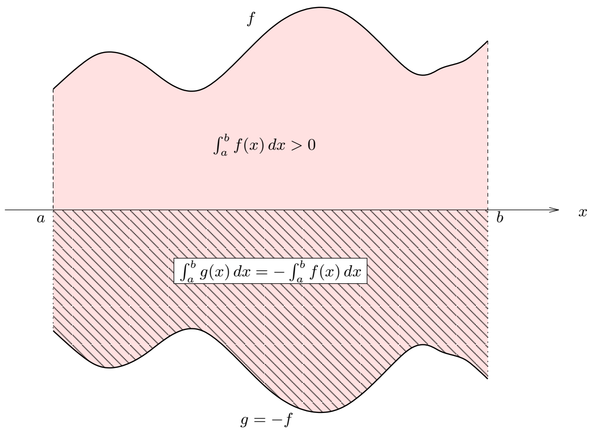


Figura 3.3: Se a função integranda tem sinal constante no intervalo, o integral tem o sinal da função integranda.

Propriedades

As funções integráveis constituem uma vasta classe de funções e existem vários resultados a estabelecer condições suficientes para a integrabilidade de funções. Destacamos o seguinte.

Proposição 3.1 *Se f é contínua em $[a, b]$, então f é integrável em $[a, b]$.*

Daqui decorre directamente que as funções elementares são integráveis em qualquer intervalo fechado dos seus domínios.
A continuidade não é no entanto condição necessária para a integrabilidade. De facto tem-se o seguinte resultado.

Proposição 3.2 *Se f é limitada em $[a, b]$ com um número finito de descontinuidades, então f é integrável em $[a, b]$.*

O integral definido satisfaz as seguintes propriedades.

Proposição 3.3 *Sejam $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funções integráveis em $[a, b]$. Então,*

1. *$f + g$ é integrável em $[a, b]$ e*
$$\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

2. *λf, com $\lambda \in \mathbb{R}$, é integrável em $[a, b]$ e*
$$\int_a^b (\lambda f) = \lambda \int_a^b f.$$

3. *(Aditividade do integral)*
$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f, \text{ com } c \in]a, b[.$$

4. *Se $f \geq g$ em $[a, b]$, então*
$$\int_a^b f \geq \int_a^b g.$$

Em particular, se $f \geq 0$ em $[a, b]$, então
$$\int_a^b f \geq 0.$$

5. *Se $f = g$, excepto eventualmente num número finito de pontos de $[a, b]$, tem-se*
$$\int_a^b f = \int_a^b g.$$

É ainda de referir o seguinte resultado que tem uma óbvia interpretação geométrica.

Teorema 3.4 *(Teorema da média) Se f é contínua em $[a, b]$, existe um ponto $c \in [a, b]$ tal que*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(c)(b-a).$$

Demonstração: Da continuidade de f decorre que

$$m \leq f(x) \leq M, \quad \forall x \in [a, b],$$

em que m e M são, respectivamente, os valores mínimo e máximo de f no intervalo $[a, b]$. Utilizando o resultado 4 da Proposição 3.3 tem-se

$$m(b-a) = \int_a^b m \leq \int_a^b f \leq \int_a^b M = M(b-a),$$

donde resulta

$$m \leq \frac{\int_a^b f}{b-a} \leq M.$$

O teorema de Bolzano permite concluir que, uma vez que a função contínua f toma os valores m e M em $[a, b]$, o valor intermédio $\frac{\int_a^b f}{b-a}$ é também um valor da função em algum ponto $c \in [a, b]$. $\square$

Para $f \geq 0$ em $[a, b]$, o teorema da média diz que a área expressa por $\int_a^b f$ é precisamente a área de um determinado rectângulo de lado $[a, b]$ e cujo lado oposto intersecta o gráfico de f (ver Figura 3.4).

Até agora só atribuímos significado ao símbolo $\int_a^b f$ com $a < b$. É útil estabelecer a seguinte convenção.

Convenção 1

1. $\displaystyle\int_a^a f = 0.$

2. Se f é uma função integrável no intervalo $[a, b]$, $\displaystyle\int_b^a f = -\int_a^b f.$

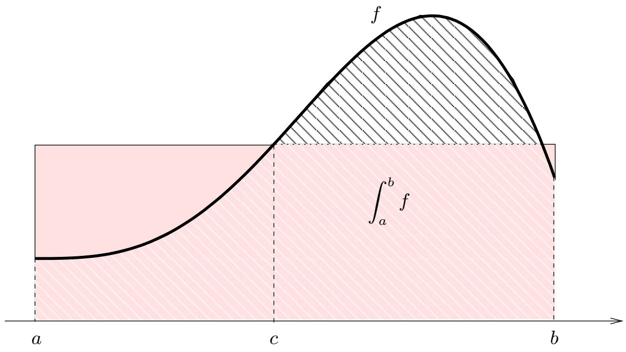


Figura 3.4: A área da região delimitada superiormente pelo gráfico de f, inferiormente pelo eixo dos xx e lateralmente pelas rectas $x = a$ e $x = b$ é a mesma do que a do rectângulo assinalado.

Observação 7 Com esta convenção a propriedade 3 da Proposição 3.3 é válida qualquer que seja a posição relativa dos pontos a, b e c, desde que a função f seja integrável no maior intervalo fechado que contenha os três pontos.
Assim, por exemplo, para $a \leq b \leq c$, tem-se

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f \Leftrightarrow \int_a^b f = \int_a^c f - \int_b^c f \Leftrightarrow \int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f.$$

Cálculo do integral

Vamos agora ocupar-nos do cálculo do integral definido. O cálculo com base na convergência das somas $A_1 + A_2 + \cdots + A_n$ não é um método eficaz. É a primitivação que vai ser a chave de uma forma expedita de abordar esta questão.

Sejam $f \geq 0$ uma função contínua no intervalo $[a, b]$, x um ponto móvel em $[a, b]$ e consideremos a área variável $A(x)$ da região delimitada superiormente pelo gráfico de f, inferiormente pelo eixo dos xx e lateralmente pelas rectas verticais que cortam o eixo dos xx em a e em x (ver a Figura 3.5). Note que $A(a) = 0$ e $A(b) = \displaystyle\int_a^b f$.

Vamos mostrar que, em cada ponto de $[a, b]$, a taxa de variação da área A coincide com

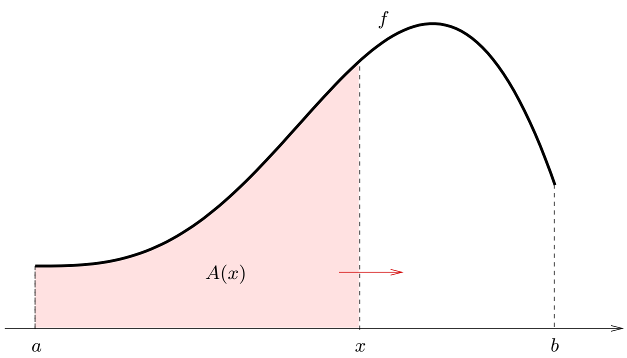


Figura 3.5: $A(x)$ é a área da região assinalada.

a altura do gráfico da função f, i.e,

$$A'(x) = f(x). \tag{3.1}$$

De facto, $A'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{A(x+h) - A(x)}{h}$ que, tendo em conta o teorema da média (Teorema 3.4) aplicado ao integral definido $\int_x^{x+h} f$, pode ser escrito $A'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{hf(c)}{h}$, com c entre x e $x+h$. Uma vez que $h \to 0 \Rightarrow c \to x$, tem-se $A'(x) = \lim\limits_{h\to 0} f(c) = \lim\limits_{c\to x} f(c) = f(x)$.
A expressão (3.1) estabelece que A é uma primitiva de f em $[a,b]$. Se F é uma qualquer primitiva de f em $[a,b]$, tem-se

$$A(x) = F(x) - F(a),$$

pois esta é a única primitiva de f que garante que $A(a) = 0$. Podemos assim concluir que

$$\int_a^b f = A(b) = F(b) - F(a).$$

É de notar que, ao estabelecer a fórmula anterior, a condição $f \geq 0$ não teve outro propósito senão o de permitir ilustrar os cálculos identificando integrais e áreas. Assim, é válido o seguinte resultado que permite calcular o integral $\int_a^b f$ desde que se conheça uma primitiva de f em $[a,b]$.

Teorema 3.5 *(Fórmula fundamental do cálculo integral) Sejam f uma função contínua em $[a,b]$ e F uma qualquer primitiva de f em $[a,b]$. Tem-se,*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

É usual denotar o membro direito da igualdade anterior escrevendo $F(b)-F(a) = [F(x)]_a^b$.

Exemplos 25

1. $\displaystyle\int_0^2 \mathrm{d}x = \int_0^2 1\,\mathrm{d}x = [x]_0^2 = 2.$

   Em geral, para $k \in \mathbb{R}$, tem-se $\displaystyle\int_a^b k\,\mathrm{d}x = [kx]_a^b = k(b-a).$

2. $\displaystyle\int_a^b 0\,\mathrm{d}x = 0.$

3. $\displaystyle\int_0^3 x^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 = 9.$

4. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin x\,\mathrm{d}x = [-\cos x]_0^{2\pi} = -1-(-1) = 0.$

5. Se $f(x) = \begin{cases} 2x & 0 \le x \le 1 \\ 2x-2 & 1 < x \le 2 \end{cases}$,

$$\begin{aligned}\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 2x\,\mathrm{d}x + \int_1^2 (2x-2)\,\mathrm{d}x = \\ &= \left[x^2\right]_0^1 + \left[x^2-2x\right]_1^2 = 1+1 = 2. \text{ (Ver Figura 3.6.)}\end{aligned}$$

   Nos cálculos efectuados utilizaram-se as propriedades 3 e 5 da Proposição 3.3. A propriedade 3 (aditividade do integral) serviu para decompor em $[0,1],[1,2]$ o intervalo de integração $[0,2]$. A propriedade 5 legitima que o cálculo de $\int_1^2 f$ se processe utilizando a função integranda $\bar{f}(x) = 2x-2$, que é contínua em $[1,2]$, em substituição da função f, que tem uma descontinuidade em $[1,2]$.

6. $\displaystyle\int_1^0 \frac{\mathrm{d}x}{1+x} = -\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x} = -\left[\ln(1+x)\right]_0^1 = -(\ln 2 - \ln 1) = -\ln 2.$

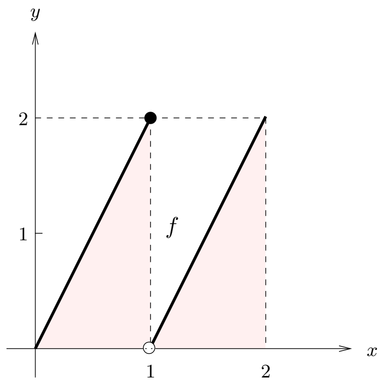


Figura 3.6: A função f é descontínua no ponto $x = 1$.

Observação 8 Se $a > b$,

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\left[F(x)\right]_b^a = -\left(F(a) - F(b)\right) = F(b) - F(a).$$

Assim, a fórmula fundamental do cálculo integral aplica-se indistintamente aos casos $a < b$ e $a > b$.

A fórmula fundamental do cálculo integral remete a determinação dos valores dos integrais à identificação das primitivas das funções integrandas. Como esse assunto já foi tratado no capítulo anterior, pouco mais há a dizer sobre o cálculo do integral definido. É no entanto pertinente enunciar a contrapartida para integrais da fórmula da primitivação por substituição (Proposição 2.6). Esta fórmula não obriga a desfazer a mudança de variável.

Proposição 3.6 *(Integração por substituição.) Sejam I e J dois intervalos, f uma função contínua em I e $\varphi : J \to I$ com derivada contínua. Sejam ainda t_0 e t_1 dois pontos de J tais que $a = \varphi(t_0)$ e $b = \varphi(t_1)$. Então,*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{t_0}^{t_1} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt, \ \textit{com } x = \varphi(t).$$

Exemplos 26

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}\mathrm{d}x.$

   Fazendo $e^x = t \Rightarrow x = \ln t = \varphi(t),\ t \in]0,+\infty[$, tem-se $x' = \varphi'(t) = \frac{1}{t}$ e

x	t
$a=0$	$t_0 = e^0 = 1$
$b=1$	$t_1 = e^1 = e$

   Assim,

$$\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}\,\mathrm{d}x = \int_1^e \frac{t}{1+t}\,\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \int_1^e \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t = [\ln(1+t)]_1^e = \ln(1+e) - \ln 2.$$

2. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x.$

   Com $x = \sin t = \varphi(t),\ t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, vem $x' = \varphi'(t) = \cos t$ e

x	t
$a=0$	$\sin t_0 = 0 \Leftrightarrow t_0 = 0$
$b=1$	$\sin t_1 = 1 \Leftrightarrow t_1 = \frac{\pi}{2}$

   Assim,

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(1+\cos 2t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[t + \frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

Exercícios 11 Calcule os seguintes integrais.

1. $\displaystyle\int_0^1 x\,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int_0^1 x^\alpha\,\mathrm{d}x$, com $\alpha \geq 0$.
3. $\displaystyle\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} 2 - x^2\,\mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int_1^2 (2x^5 - \frac{1}{x^2})\,\mathrm{d}x$
5. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}} x\cos(x^2-\pi)\,\mathrm{d}x$
6. $\displaystyle\int_2^3 \frac{x}{x^2-25}\,\mathrm{d}x$
7. $\displaystyle\int_1^{e^2} \frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$
8. $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x,\ \text{com } f(x) = \begin{cases} x^2+1, & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{x+4}{2}, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$
9. $\displaystyle\int_0^1 x2^x\,\mathrm{d}x$
10. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} (x+\cos x)\sin x\,\mathrm{d}x$
11. $\displaystyle\int_0^1 e^x \mathrm{arctg}\,(e^x)\,\mathrm{d}x$
12. $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{2x}}{e^x+4}\,\mathrm{d}x.$

Muitos conceitos importantes e problemas de Geometria, Física, Biologia, Engenharia, Economia, etc, baseiam-se exactamente na mesma ideia subjacente ao cálculo de áreas, a de que o todo de uma quantidade pode ser obtido decompondo-o num grande número de partes convenientes e somando-as através da integração.

A seguir apresentamos alguns exemplos da grande variedade de aplicações do integral definido. No contexto das aplicações é em geral importante referir a unidade de medida de $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, que é o produto das unidades de $f(x)$ e x.

Cálculo das áreas de regiões definidas pelos gráficos de duas funções

Já vimos que, se $f \geq 0$ em $[a,b]$, $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ é a área da região delimitada superiormente pelo gráfico da função f, inferiormente pelo eixo dos xx e lateralmente pelas rectas verticais $x = a$ e $x = b$.

É óbvio (ver Figura 3.7) que, se $f \geq g \geq 0$ em $[a,b]$, a área da região R delimitada

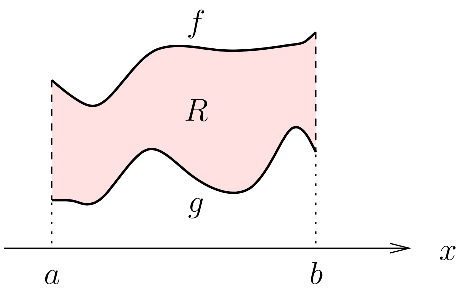


Figura 3.7: R é a região delimitada superiormente pelo gráfico de f, inferiormente pelo gráfico de g e lateralmente pelas rectas $x = a$ e $x = b$.

superiormente pelo gráfico de f, inferiormente pelo gráfico de g e lateralmente pelas rectas $x = a$ e $x = b$ é dada por

$$\text{área de R} = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x.$$

Esta mesma fórmula aplica-se, se $f \geq g$, independentemente dos sinais de f e g. De facto, se g tomar valores negativos, podemos somar a f e a g uma dada constante positiva C de forma a que $f + C \geq g + C \geq 0$ (ver Figura 3.8). Daqui resulta uma translacção da

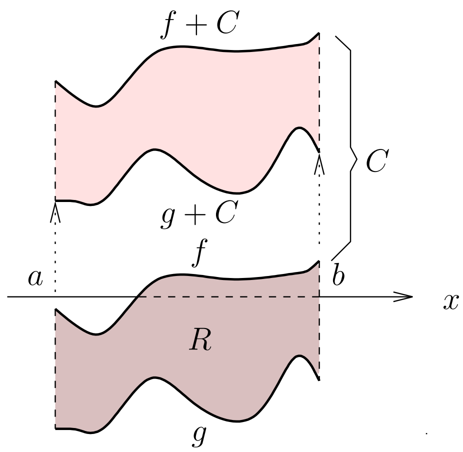


Figura 3.8: A região R e a delimitada superiormente pelo gráfico de $f + C$, inferiormente pelo gráfico de $g + C$ e lateralmente pelas rectas $x = a$ e $x = b$, têm a mesma área.

região R remetendo o cálculo da área ao caso anterior. Tem-se assim,

$$\text{área de R} = \int_a^b ((f(x) + C) - (g(x) + C))\,\mathrm{d}x = \int_a^b (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x,$$

tal como no caso anterior.

Consideremos agora a situação em que $f - g$ muda de sinal um número finito de vezes em $[a, b]$. Neste caso há que identificar os pontos $c_1, c_2, \ldots, c_n$ onde ocorrem as mudanças de sinal e calcular a área da região em cada um dos intervalos $[a, c_1], [c_1, c_2], \ldots, [c_n, b]$. Assim, a área da região R assinalada na Figura 3.9 é dada por

$$\text{área de R} = \int_a^{c_1} (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x + \int_{c_1}^{c_2} (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x + \int_{c_2}^{b} (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x.$$

Exemplo 27 Vamos calcular a área da região R assinalada na Figura 3.10.

Comecemos por determinar os pontos c e b.

O ponto c é a abcissa do ponto do 1^{o} quadrante de intersecção dos gráficos de f e g.

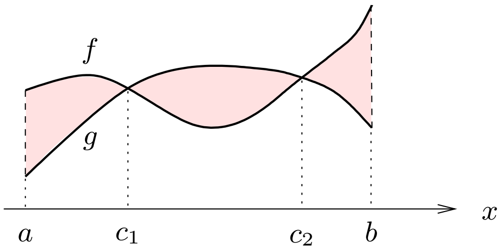


Figura 3.9: R é a região delimitada pelos gráficos das funçoes f e g no intervalo $[a, b]$.

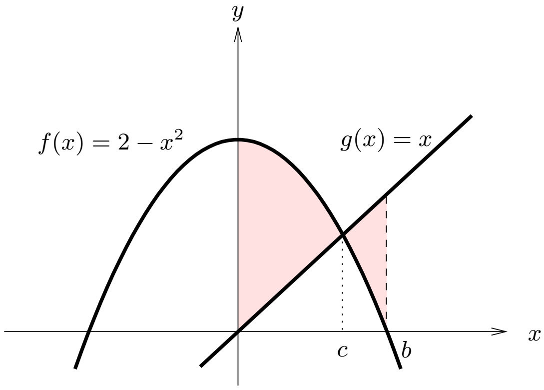


Figura 3.10: R é a região do 1º quadrante delimitada pelos gráficos das funçoes $f(x) = 2 - x^2$ e $g(x) = x$.

Assim, $c > 0$ e $2 - c^2 = c \Leftrightarrow c = 1$.
O ponto b é o zero positivo da função f, i.e, $b > 0$ e $2 - b^2 = 0 \Leftrightarrow b = \sqrt{2}$.
Tem-se pois

$$\begin{aligned}
\text{área de } R &= \int_0^c (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x + \int_c^b (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x = \\
&= \int_0^1 (2 - x^2 - x)\,\mathrm{d}x + \int_1^{\sqrt{2}} (x - 2 + x^2)\,\mathrm{d}x \\
&= \left[2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[\frac{x^2}{2} - 2x + \frac{x^3}{3}\right]_1^{\sqrt{2}} = \\
&= \frac{7}{6} + (\frac{13}{6} - \frac{4}{3}\sqrt{2}) = \frac{10}{3} - \frac{4}{3}\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Exercícios 12

1. Calcule a área das seguintes regiões:

   a) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ 0\le x\le 2,\quad -x^2\le y\le\sqrt{x}\}$

   b) Determine a área da região definida pelos gráficos das funções $f(x)=\cos x$ e $g(x)=x-\frac{\pi}{2}$ no intervalo $[0,\pi]$.

   c) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ -1\le x\le 1,\quad x^2-1\le y\le \arccos x\}$

   d) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |x|+y\le 2,\quad y\ge x^2-4\}$

   e) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |\sin x|\le y\le e^x,\quad 0\le x\le 2\pi\}$.

   f) Determine a área da região definida por $\{(x,y) : |\cos x|\le y\le x+1, x\le\pi\}$.

2. Calcule a área da região contida no semi-plano $x\ge 1$ e delimitada pelas curvas $y=x^2,\ x=y^2$ e $y=4$.

3. Calcule a área da região do plano delimitada pelas curvas $y=\sin x$ e $y=\cos x$ e pelas rectas $x=0$ e $x=2\pi$.

4. Considere a região $A=\{(x,y):\ y\ge x^2\wedge y\le 1\}$. Determine o número real K tal que a recta $y=K$ divida A em duas regiões de área igual.

Outras aplicações (Opcional)

Variação total

A taxa de variação de uma quantidade $F(x)$ é dada por $F'(x)$. Então, a variação total de F entre $x=a$ e $x=b$, $F(b)-F(a)$, é dada por $\displaystyle\int_a^b F'(x)\,\mathrm{d}x$ (Teorema Fundamental do Cálculo Integral), ou seja, o integral definido de uma taxa de variação representa a variação total.

Exemplo 28 As taxas de crescimento das alturas de duas árvores (em metros por ano) estão representadas na Figura 3.11.

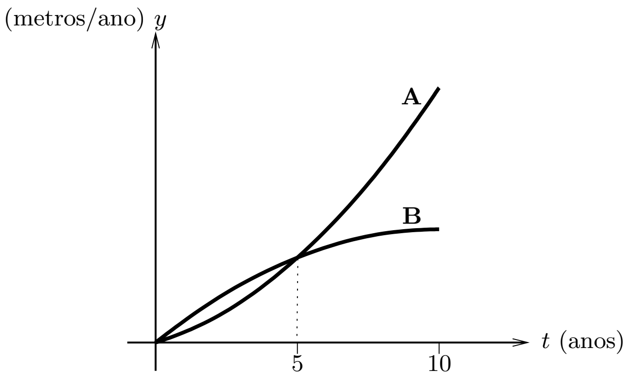


Figura 3.11: Taxas de crescimento das alturas de duas árvores.

Se as árvores têm a mesma altura no instante $t = 0$, qual é a mais alta ao fim de 5 anos? E ao fim de 10 anos?

A variação total da altura de cada árvore ao fim de t anos é dada pela área da região abaixo da correspondente curva no intervalo $[0, t]$ (ver Figura 3.11). Logo, ao fim de 5 anos, a árvore B é a mais alta, enquanto que ao fim de 10 anos é a árvore A.

Valor médio

Como determinar o "valor médio" de uma função contínua em $[a, b]$? Como primeira aproximação vamos determinar a média de valores de f calculados em n pontos x_1, x_2,...,x_n de $[a, b]$. O valor médio de f vem

$$f_{\text{med}} \approx \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}.$$

Supondo que os pontos x_1,...,x_n estão igualmente espaçados, a distância entre quaisquer dois pontos é $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Podemos agora escrever

$$f_{\text{med}} \approx \frac{f(x_1)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x}{b - a}.$$

Obviamente que quanto maior for n melhor será esta aproximação. Fazendo $n \to +\infty$, a soma anterior converge precisamente para $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Assim, define-se

$$f_{\text{med}} = \frac{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}{b-a}.$$

Na Figura 3.12, identificamos graficamente o valor médio da função com a altura do rectângulo de base $[0,5]$ cuja área é igual à área abaixo da curva.

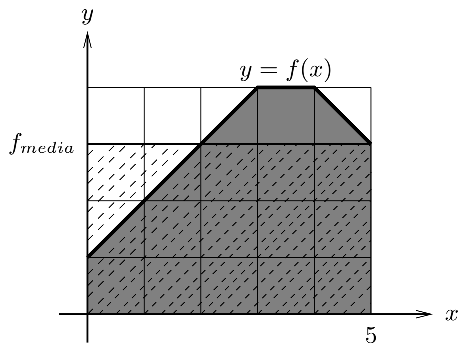


Figura 3.12: Taxas de crescimento da altura de duas árvores.

.

Exemplo 29 Suponha que a temperatura T do ar (em ^0C) ao longo de um dado dia é dada por $T = 0.001t^4 - 0.28t^2 + 25$, em que $t \in [0,24]$ é o tempo em horas. A temperatura média do ar desse dia é $T_{\text{med}} = \dfrac{\int_0^{24} 0.001t^4 - 0.28t^2 + 25\,\mathrm{d}t}{24} = 37.595^0C$.

Probabilidades

Na tomada de decisões é importante saber como uma certa característica ou variável se distribui numa população, por exemplo, a altura numa população de árvores, o peso numa população de suínos, etc. No caso da variável em estudo poder assumir uma infinidade (não numerável) de valores (variável aleatória contínua), a descrição da respectiva distribuição pode ser feita através da função densidade de probabilidade.

Uma função densidade de probabilidade (f.d.p.) de uma variável aleatória é uma função $y = f(x)$ (Figura 3.13) que satisfaz as seguintes condições

1. $f(x) \geq 0$, para todo o x, e
2. a área abaixo do gráfico de f é igual a 1.

Se X é uma variável aleatória com f.d.p. f, a probabilidade de X tomar valores num dado intervalo é igual à área da região delimitada pelo gráfico de f no intervalo.

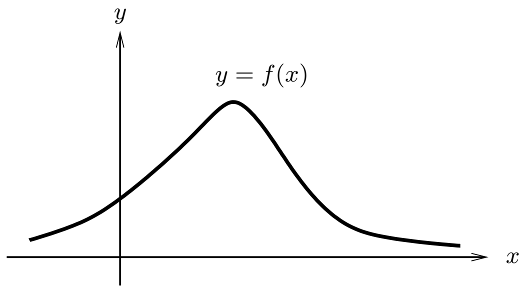


Figura 3.13: Função densidade de probabilidade.

O conceito de integral permite então escrever

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exemplo 30 Suponha que X é a concentração diária (em ppm) de monóxido de carbono (CO) na atmosfera numa dada zona urbana, e que a função densidade de X é

$$f(x) = 3.4e^{-3.4x},\ x \geq 0.$$

Pretende-se determinar i) a probabilidade de a concentração de CO estar entre 1 ppm e 2 ppm e ii) a proporção de dias em que a concentração de CO excede 2 ppm.
Assim, i) $P(1 \leq X \leq 2) = \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 0.03229$ e ii) Uma vez que $P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 1.1138 \times 10^{-3}$, a proporção é de 1.1138 dias em 1000.

Trabalho

O trabalho realizado por uma força de intensidade constante F quando o deslocamento d do ponto de aplicação da força tem a mesma direcção e sentido da força é dado por $W = F\,d$ ($W = -F\,d$ quando o sentido do deslocamento é contrário ao da força).
Se a intensidade $F(x)$ da força depende da posição x do ponto de aplicação, então o trabalho realizado pode ser calculado decompondo o deslocamento em deslocamentos muito pequenos de forma a considerar a intensidade da força constante relativamente a cada um deles. O trabalho resultante é obtido através da soma dos trabalhos realizados usando o processo de integração. Assim, $W = \int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x$, quando o deslocamento ocorre de a até b na mesma direcção e sentido da força.

Exemplo 31 Um corpo é elevado do solo à altura de 10 m por acção de uma força de intensidade (em newton) dada por $F(x) = 200 + 3(10 - x)$, em que x é a altura do corpo (em metros). O trabalho realizado por esta força é $W = \int_0^{10} F(x)\,\mathrm{d}x = 2150$ J.

Exercícios 13

1. Um insecto voa (num período limitado de tempo) com a velocidade $v(t) = 10+8t-t^2$ metros por segundo.

   a) Trace o gráfico de $v(t)$ e identifique geometricamente a distância percorrida pelo insecto durante os primeiros cinco segundos.

   b) Calcule essa distância.

2. A taxa de variação diária da quantidade de água numa planta (em gramas por hora) é dada por $V'(t) = -0.041667t(24-t)+4$, em que t é o tempo em horas ($0 \leq t \leq 24$). Será que ao fim do dia a planta perdeu ou ganhou água?

3. O perfil de um dado solo revelou que a concentração de azoto (em g/m^3) é dada por $y = 673.8 - 34,7x$, em que $x \in [0, 10]$ é a profundidade do solo (em m). Calcule a concentração média de azoto no solo.

4. A população P (em milhões de pessoas) de um dado país é dada por $P = 67.38(1.026)^t$, em que t é o tempo em anos desde 1980. Qual é a população média entre 1980 e 1990?

5. Suponha que X mede o tempo (em horas) que um estudante demora a concluir uma prova de exame cuja duração é de duas horas, e que a função densidade de X é

$$f(x) = \frac{x^3}{4}, \ x \in [0, 2].$$

   a) Qual é a probabilidade de um estudante demorar entre 1.5 h e 2h a fazer o exame?

   b) Determine a tal que $\displaystyle\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0.5$. Interprete o parâmetro a no contexto do problema.

6. Seja $f(x) = 0.1e^{-0.1x}$ para $x \geq 0$, a função densidade do tempo de espera (em minutos) de uma pessoa numa paragem de autocarros.

   a) Qual é a probabilidade de o tempo de espera não exceder 5 min?

   b) Qual é a percentagem de pessoas que espera mais de 1/2 h?

7. Uma bola de ferro é atraída por um íman com um força $F = \frac{15}{x^2}$ N quando a bola está a x metros do íman.

   a) Calcule o trabalho realizado pela força quando a bola sofre um deslocamento de 4 m na mesma direcção e em sentido contrário aos da força, supondo que a bola e o íman se encontravam à distância de 2 m.

   b) Calcule a força média aplicada na bola na situação descrita em a).

3.2 Integral indefinido

Dada uma função f integrável em $[a,b]$, vamos estudar a função

$$\varphi(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{dt}, \text{ com } x \in [a,b],$$

cujo valor depende do limite superior do integral. A função $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ chama-se *integral indefinido* de f (com origem em a).

Geometricamente, se $f \geq 0$ em $[a,b]$, esta função representa a área variável que introduzimos ao estabelecer a fórmula fundamental do cálculo integral e que então denotámos por $A(x)$ (ver Figura 3.5).

Observações 9

1. A variável utilizada no limite superior de integração e a variável de integração que figuram na expressão da função φ não podem ser representadas pelo mesmo símbolo, pois têm papéis distintos.

2. Em cada ponto $x = c$ do intervalo $[a,b]$, o valor de φ é o integral definido $\varphi(c) = \int_a^c f(t)\,dt$. Em particular, $\varphi(a) = 0$.

Exemplos 32

1. Consideremos $\varphi(x) = \displaystyle\int_1^x f(t)\,\mathrm{dt}$, com $x \in [1,5]$ e em que $f(t) = \frac{1}{t}$. (Ver Figura 3.14.)

   Como $f > 0$ em $[1,5]$, a função φ é crescente pois para quaisquer $x_1 > x_0$, a área $\varphi(x_1) = \varphi(x_0) +$ área de $R > \varphi(x_0)$. Esta propriedade é uma consequência da natureza cumulativa do integral indefinido. Lê-se bem no gráfico da função $\varphi(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}\mathrm{dt} = [\ln t]_1^x = \ln x$ o acréscimo: área de $R = \varphi(x_1) - \varphi(x_0)$.

2. Consideremos $\varphi(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{dt}$, com $x \in [0,2]$ e em que $f(t) = \begin{cases} 2 & 0 \leq t \leq 1 \\ t^2 & 1 < t \leq 2 \end{cases}$.

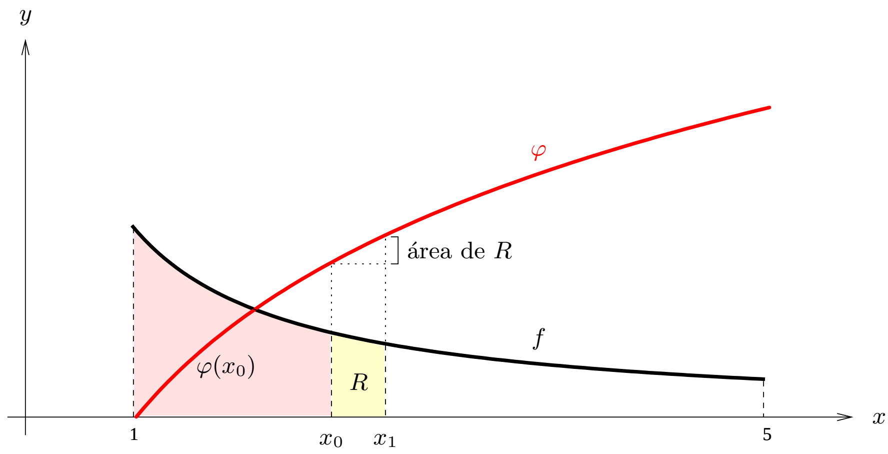


Figura 3.14: A função crescente φ é o integral indefinido de $f > 0$ no intervalo $[1, 5]$.

Para $x \in [0, 1]$,

$$\varphi(x) = \int_0^x 2\,\mathrm{d}t = 2[t]_0^x = 2x.$$

Para $x \in]1, 2]$,

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t + \int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 2\,\mathrm{d}t + \int_1^x t^2\,\mathrm{d}t = \\ &= [2t]_0^1 + \left[\frac{t^3}{3}\right]_1^x = 2 + \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3} = \\ &= \frac{x^3 + 5}{3}.\end{aligned}$$

Note que, apesar de f ser descontínua em $x = 1$, o integral indefinido φ é uma função contínua em $[0, 2]$ (ver Figura 3.15). Esta propriedade é também consequência da natureza cumulativa do integral indefinido que é insensível a descontinuidades num número finito de pontos da função integranda.

A função integral indefinido $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$

$$\varphi(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t, \text{ com } x \in [a, b]$$

verifica três importantes propriedades que enunciamos em seguida. As duas primeiras foram ilustradas nos Exemplos 32.

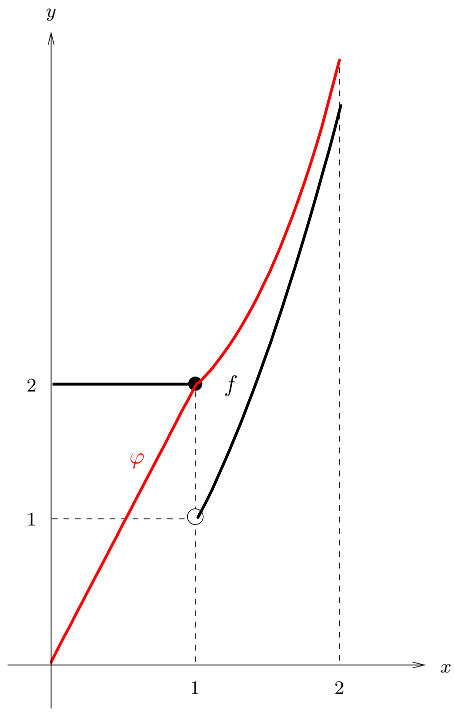


Figura 3.15: A função contínua φ é o integral indefinido de f no intervalo $[0, 2]$.

Proposição 3.7 *Se $f \geq 0$ em $[a, b]$, então φ é crescente em $[a, b]$.*

Proposição 3.8 *A função φ é contínua em $[a, b]$, i.e., para todo o ponto $x_0 \in [a, b]$ tem-se*

$$\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = \varphi(x_0), \text{ escrito de outro modo } \lim_{x \to x_0} \int_a^x f(t)\, dt = \int_a^{x_0} f(t)\, dt.$$

A terceira propriedade foi anteriormente provada ao estabelecer-se a igualdade (3.1) ($A'(x) = f(x)$). Na altura fez-se referência que a condição $f \geq 0$ apenas foi usada para identificar $A(x) = \int_a^x f(t)\, \mathrm{d}t$.

Proposição 3.9 *Se f é contínua em $[a, b]$, então φ é derivável em $[a, b]$ e*

$$\varphi'(x) = f(x), \text{ ou de forma equivalente } \left(\int_a^x f(t)\, dt \right)' = f(x), \text{ com } x \in [a, b].$$

Assim, se f é contínua existe uma função - o integral indefinido - cuja derivada é f. Portanto tem-se o seguinte.

Proposição 3.10 *Se f é contínua em $[a, b]$, então f é primitivável em $[a, b]$ e $Pf(x) = \int_a^x f(t)\,dt$.*

Fica assim provado o Teorema 2.2 enunciado no capítulo sobre primitivação de funções.

Observações 10

1. A Proposição 3.10 garante a possibilidade de definir uma primitiva Pf de qualquer função contínua f, mesmo quando Pf não é elementar. Por exemplo, a primitiva de $f(x) = e^{-x^2}$, que se anula em $x = 1$, é $Pe^{-x^2} = \displaystyle\int_1^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

2. A Proposição 3.9 permite derivar toda a função escrita na forma $\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$, sem necessidade de calcular o integral, desde que a função integranda f seja contínua. Por exemplo, para $x \geq 0$, tem-se
$$\left(\int_0^x \frac{t^3}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\right)' = \frac{x^3}{1+x^2}.$$

Terminamos o estudo do integral indefinido referindo que, tal como para o integral definido, tem significado considerar o integral indefinido com o limite superior de integração à esquerda da origem do integral. Todas as propriedades anteriormente enunciadas mantêm-se válidas independentemente da posição de x em relação à origem a.

Exemplo 33 Considere $\varphi(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t$. Dado que a função integranda é contínua em $\mathbb{R}$, $\varphi(x)$ está definida para todo o $x \in \mathbb{R}$ e é derivável, com $\varphi'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} > 0$, o que permite concluir que φ é estritamente crescente em $\mathbb{R}$. Como $\varphi(1) = 0$, a monotonia assegura que $\varphi(x) < 0$, para $x < 1$ e $\varphi(x) > 0$, para $x > 1$. O estudo de outras características do integral indefinido φ, como por exemplo o contradomínio e assimptotas não verticais, requer a determinação de $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \varphi(x) = \lim_{x\to\infty} \int_1^x \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t$, exigindo o cálculo de uma primitiva da função integranda.

Exercícios 14

1. Determine uma expressão para $\displaystyle\int_0^x (te^t - te)\,\mathrm{d}t$ onde não figure o símbolo do integral.

2. Considere $f(t) = \begin{cases} 2, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & 1 \leq t < 3 \\ -1, & 3 \leq t \leq 4 \end{cases}$. Represente graficamente a função $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$, com $x \in [0,4]$.

3. Escreva a função $\displaystyle\int_{-2}^x t|t-1|\,\mathrm{d}t$ sem recurso ao símbolo do integral.

4. Considere a função $F(x) = \displaystyle\int_0^x (3 - \sin^2 t)\,\mathrm{d}t$.

   a) Mostre que F é estritamente crescente em $\mathbb{R}$.

   b) Indique uma equação da recta tangente ao gráfico de F em $x = 0$.

5. Considere $F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$, com $x > 0$. Estude a monotonia de F e o sentido da concavidade do gráfico de F em $\mathbb{R}^+$.

6. Calcule $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \displaystyle\int_0^x e^{-t}\,\mathrm{d}t}{e^{x^3} - 1}$.

3.3 Integral impróprio

Vamos generalizar a noção de integral aos casos em que o intervalo de integração é não limitado ou a função integranda tem limite infinito num extremo do intervalo de integração. Assim, vamos atribuir significado, por exemplo, aos integrais $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ e $\int_0^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ (ver Figura 3.16). Para isto vamos tomar limites da função integral indefinido. Mais precisamente,

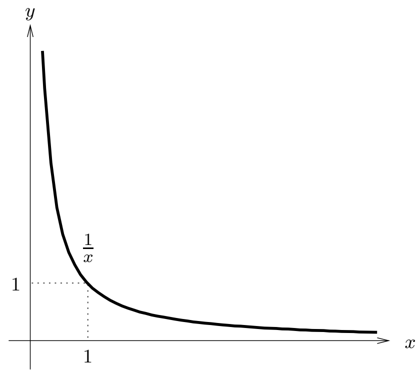


Figura 3.16: Gráfico da função $\frac{1}{x}$, com $x > 0$.

(i) (caso em que o intervalo de integração não é limitado) se f é uma função contínua em $[a, +\infty[$, vamos calcular o limite quando $x \to +\infty$ da função $F(x) = \int_a^x f$ (ver Figura 3.17 a)). Se este limite existir, chama-se *integral impróprio* de f em $[a, +\infty[$ e escreve-se

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x \to +\infty} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

(ii) (Caso em que a função integranda tem limite infinito num extremo do intervalo de integração) se f é uma função contínua em $]a, b]$ e $\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$, vamos calcular o limite quando $x \to a^+$ da função $G(x) = \int_x^b f$ (ver Figura 3.17 b)). Se este limite existir, chama-se *integral impróprio* de f em $]a, b]$ e escreve-se

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x \to a^+} \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

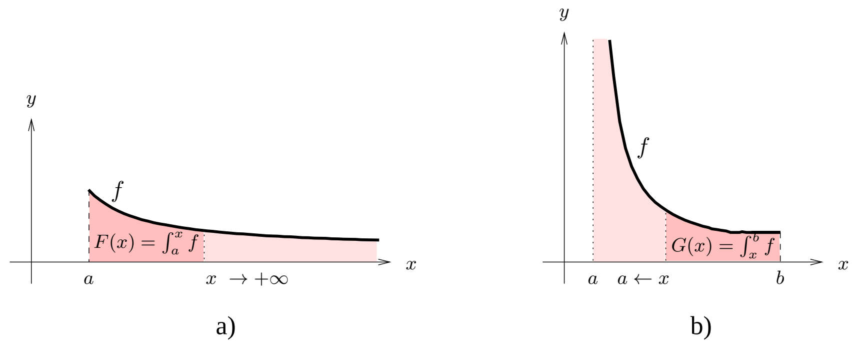


Figura 3.17: Integral impróprio: a) caso em que o intervalo de integração é $[a, +\infty[$; b) caso em que a função integranda tem limite infinito em a.

Quando o limite é finito, diz-se que o correspondente integral impróprio é *convergente*. Caso contrário, o integral impróprio é *divergente*.
Se $f > 0$, o integral impróprio é a área da região ilimitada definida pela função no intervalo de integração. Para cada uma das funções representadas na Figura 3.17 está assinalada a correspondente região.

Exemplos 34

1. Para a função $f(t) = \frac{1}{t}$ tem-se

   (i) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty} [\ln t]_1^x = \lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty.$

   (ii) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to 0^+} \int_x^1 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to 0^+} [\ln t]_x^1 = \lim_{x\to 0^+} -\ln x = +\infty.$

   Assim, os dois integrais impróprios são divergentes.

2. Para a função $f(t) = \frac{1}{t^2}$ tem-se,
   $$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty} \left[-\frac{1}{t}\right]_1^x = 0 - (-1) = 1.$$
   O integral impróprio é convergente e a região ilimitada definida por $\frac{1}{t^2}$, com $t \in [1, +\infty[$, tem área 1.

3. Para a função $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$ tem-se,

   $$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to 0^+} \int_x^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to 0^+} \left[2\sqrt{t}\right]_x^1 = 2.$$

   O integral impróprio é convergente e a região ilimitada definida por $\frac{1}{\sqrt{t}}$, com $t \in]0,1]$, tem área 2.

Os integrais impróprios do exemplo anterior são casos particulares de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ e $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$, chamados *integrais de Dirichlet*. Estes integrais são frequentemente utilizados, como veremos à frente, para decidir sobre a natureza (convergência ou divergência) de vários integrais impróprios.

Na Figura 3.18 estão representados gráficos das funções $\frac{1}{t^\alpha}$, com $t > 0$, para diferentes valores de α. O valor de $\alpha = 1$ é uma fronteira no que respeita à natureza dos integrais

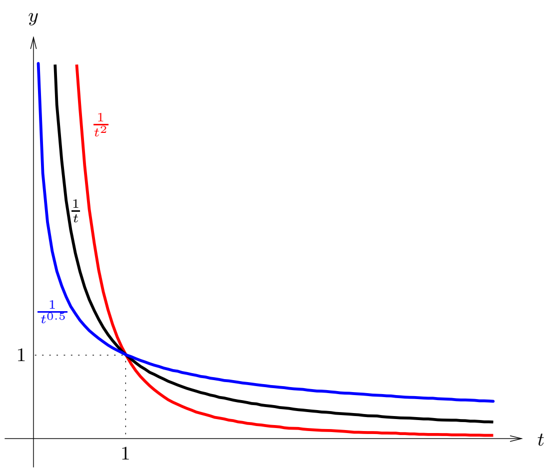


Figura 3.18: Gráficos de algumas funções $\frac{1}{t^\alpha}$, com $t > 0$, com $\alpha = 1, 2$ e 0.5.

de Dirichlet. De facto, tem-se os seguintes resultados.

Proposição 3.11

(i) $$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} & \text{se } \alpha > 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha \leq 1 \end{cases}$$

(ii) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & \text{se } \alpha < 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha \geq 1 \end{cases}$

EXERCÍCIO 15 Prove a Proposição 3.11.

Existem outros tipos de integrais impróprios de funções contínuas. Nomeadamente,

1. Integral impróprio de f em $]-\infty, b]$, i.e.,

$$\int_{-\infty}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to-\infty} \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

   Por exemplo,

$$\int_{-\infty}^{0} e^t\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to-\infty} \int_x^0 e^t\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to-\infty} \left[e^t\right]_x^0 = 1.$$

2. Integral impróprio de f em $[a, b[$, quando $\lim\limits_{t\to b^-} f(t) = \infty$ i.e.,

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to b^-} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

   Por exemplo, para $f(t) = \frac{t}{1-t^2}$, em que $\lim\limits_{t\to1^-} f(t) = +\infty$, tem-se

   $\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{1-t^2}\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to1^-} \int_0^x \frac{t}{1-t^2}\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to1^-} \left[-\frac{1}{2}\ln(1-t^2)\right]_0^x = +\infty$. Neste caso o integral impróprio é divergente.

3. Integral impróprio de f em $]a, b[$, que contempla as situações em que $a = -\infty$ e $b = +\infty$ ou $\lim\limits_{t\to a^+} f(t) = \lim\limits_{t\to b^-} f(t) = \infty$, entre outras.

   O integral impróprio $\displaystyle\int_a^b f$, em $]a, b[$, diz-se convergente se para algum ponto $c \in]a, b[$, os integrais impróprios $\displaystyle\int_a^c f$ e $\displaystyle\int_c^b f$ são ambos convergentes. Neste caso, escreve-se

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

   Verifica-se facilmente que a convergência e o valor do integral impróprio não dependem da escolha do ponto c.

O integral impróprio $\int_a^b f$ em $]a,b[$, é divergente se algum dos integrais impróprios $\int_a^c f$ ou $\int_c^b f$ é divergente.

Por exemplo,

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t &= \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \\
&= \lim_{x\to-\infty} \int_x^0 \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t + \lim_{y\to+\infty} \int_0^y \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \\
&= \lim_{x\to-\infty} \left[\operatorname{arctg} t\right]_x^0 + \lim_{y\to+\infty} \left[\operatorname{arctg} t\right]_0^y = \\
&= -\lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x + \lim_{y\to+\infty} \operatorname{arctg} y = \pi.
\end{aligned}$$

Exercícios 16 Estude a natureza de cada um dos seguintes integrais impróprios e, em caso de convergência, indique o seu valor.

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+4}\,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int_0^{2} \frac{1}{4-x^2}\,\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{1}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{1}{x\ln x}\,\mathrm{d}x$
5. $\displaystyle\int_0^{2} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$
6. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$
7. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,\mathrm{d}x$
8. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\sin x\,\mathrm{d}x$
9. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{x(x-1)}\,\mathrm{d}x.$

Exercício 17 Calcule a área da região ilimitada do 1º quadrante compreendida entre a curva $y = xe^{-x^2}$ e a sua assintota.

Exercício 18 A taxa à qual as aves de uma dada região adoecem durante uma epidemia de gripe (em número de aves por dia) é dada por $R(t) = 1000te^{-0.5t}$, em que t é medido em dias desde o início da epidemia. Traduza através do integral impróprio o número total de aves atingidas e calcule o seu valor.

Vamos agora estabelecer alguns critérios de convergência para os integrais impróprios de funções contínuas em $[a, b[$, podendo b ser finito ou $+\infty$. Os critérios que iremos apresentar adaptam-se de forma óbvia aos integrais impróprios em intervalos dos outros tipos. Comecemos por referir os seguintes resultados evidentes.

Observações 11

1. Para todo o ponto $c \in [a, b[$, os integrais impróprios $\int_a^b f$ e $\int_c^b f$ têm a mesma natureza

2. Para todo o $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, os integrais impróprios $\int_a^b f$ e $\int_a^b \lambda f$ têm a mesma natureza.

O primeiro critério que enunciamos aplica-se a funções f e g não negativas em $[a, b[$. O critério estabelece que, estando o gráfico de f acima do de g, a área da região definida por f em $[a, b[$ não é inferior à da região definida por g no mesmo intervalo (ver Figura 3.19).

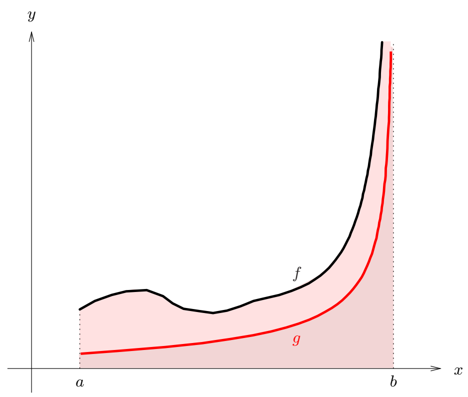


Figura 3.19: A área da região definida por f em $[a, b[$ não é inferior à da região definida por g em $[a, b[$.

Mais precisamente,

Proposição 3.12 *(1º critério de comparação) Sejam f e g funções contínuas em $[a, b[$, com $f \geq g \geq 0$ e $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = \lim\limits_{x \to b^-} g(x) = +\infty$ ou $b = +\infty$.*

1. Se $\int_a^b f$ converge, então $\int_a^b g$ converge.

2. Se $\int_a^b g$ diverge, então $\int_a^b f$ diverge.

Exemplos 35

1. Vamos estudar a natureza do integral impróprio $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{1+x^2}\, \mathrm{d}x$.

   Como, $\frac{1}{x^2} \geq \frac{\sin^2 x}{1+x^2} \geq 0$ em $[1, +\infty[$, a convergência do integral de Dirichlet $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, \mathrm{d}x$ permite concluir que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{1+x^2}\, \mathrm{d}x$ é convergente.

2. Atendendo a que $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{\sqrt{x}+2x} = +\infty$, $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}+2x}\, \mathrm{d}x$ é integral impróprio em $]0, 1]$.

   Para $x > 0$, $\sqrt{x}+2x > \sqrt{x}$ e portanto $\frac{1}{\sqrt{x}} > \frac{1}{\sqrt{x}+2x} > 0$. Como $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, \mathrm{d}x$ é um integral de Dirichlet convergente, o integral impróprio $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}+2x}\, \mathrm{d}x$ é também convergente.

3. Para estudar a natureza do integral impróprio $\int_e^{+\infty} \frac{2}{\ln x}\, \mathrm{d}x$, recorremos ao integral de Dirichlet $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\, \mathrm{d}x$.

   Atendendo às Observações 11 os integrais $\int_e^{+\infty} \frac{2}{\ln x}\, \mathrm{d}x$ e $\int_e^{+\infty} \frac{1}{\ln x}\, \mathrm{d}x$, bem como $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\, \mathrm{d}x$ e $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x}\, \mathrm{d}x$ têm a mesma natureza.

   Uma vez que em $[e, +\infty[$, $0 \leq \ln x \leq x$, tem-se $\frac{1}{\ln x} \geq \frac{1}{x} \geq 0$. A divergência do integral impróprio $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x}\, \mathrm{d}x$ assegura que $\int_e^{+\infty} \frac{1}{\ln x}\, \mathrm{d}x$ e, consequentemente, $\int_e^{+\infty} \frac{2}{\ln x}\, \mathrm{d}x$ são também divergentes.

O segundo critério, que se aplica também a funções f e g não negativas no intervalo $[a, b[$, utiliza a razão $\frac{f}{g}$.

Proposição 3.13 *(2º critério de comparação) Sejam f e g funções não negativas e contínuas em $[a, b[$, com $g \neq 0$ e $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = \lim\limits_{x\to b^-} g(x) = +\infty$ ou $b = +\infty$. Se $\lim\limits_{x\to b^-} \dfrac{f(x)}{g(x)} \neq 0, +\infty$, os integrais impróprios $\int_a^b f$ e $\int_a^b g$ são ambos convergentes ou ambos divergentes.*

Exemplos 36

1. Vamos estudar a natureza do integral impróprio $\int_1^{+\infty} \sin\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$.

   Note que para $x \in [1,+\infty[$, $\frac{1}{x} \in]0,1]$ e consequentemente $\sin\frac{1}{x} > 0$.

   Como $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 1 \neq 0, +\infty$, o integral impróprio $\int_1^{+\infty} \sin\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ é divergente tal como o integral de Dirichlet $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$.

2. Dado que $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x\sqrt{x-1}} = +\infty$, $\int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{x-1}}$ é integral impróprio em $]1,2]$.

   $\lim_{x\to 1^+} \frac{\frac{1}{x\sqrt{x-1}}}{\frac{1}{\sqrt{x-1}}} = \lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x} = 1 \neq 0, +\infty$. Atendendo a que o integral impróprio $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x = \displaystyle\lim_{y\to 1^+}\int_y^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x = \lim_{y\to 1^+}\left[2\sqrt{x-1}\right]_y^2 = 2$, conclui-se que $\int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{x-1}}$ é convergente.

3. Para decidir sobre a convergência de $\int_1^{+\infty} \frac{2x-1}{x^3-x+4}$ utilizamos o integral de Dirichlet $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}$ que é convergente.

   Ora, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{2x-1}{x^3-x+4}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3-x^2}{x^3-x+4} = 2 \neq 0, +\infty$ e portanto $\int_1^{+\infty} \frac{2x-1}{x^3-x+4}$ é também convergente.

Exercícios 19 Estude a natureza dos seguintes integrais impróprios.

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}\,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x+4}{e^x}\,\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-|\sin x|}}{x}\,\mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$
5. $\displaystyle\int_0^1 \ln\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$
6. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1+\sin^2 x}{x}\,\mathrm{d}x$
7. $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt[3]{x}-1}\,\mathrm{d}x$
8. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}(2-x)}\,\mathrm{d}x$
9. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1-\cos x}\,\mathrm{d}x$.

Terminamos com um resultado que poderá ser útil para deduzir a convergência de integrais impróprios quando a função integranda f não tem sinal constante no intervalo de integração, que se pode facilmente provar usando as desigualdades $0 \le |f| + f \le 2|f|$.

Proposição 3.14 *Seja f uma função contínua em $[a,b[$, com $\displaystyle\lim_{x\to b^-} f(x) = \infty$ ou $b = +\infty$. Se o integral impróprio $\int_a^b |f|$ converge, então $\int_a^b f$ também converge.*

EXEMPLO 37 Para estudar a natureza do integral impróprio $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$, consideramos $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

Uma vez que $0 \leq \frac{|\sin x|}{1+x^2} \leq \frac{1}{1+x^2} \leq \frac{1}{x^2}$ e o integral de Dirichlet $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ é convergente, do 1º critério de comparação conclui-se que $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ é convergente e, pela Proposição 3.14 que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ também converge.

EXERCÍCIOS 20

1. Calcule o valor de cada uma das seguintes expressões.

   a) $\displaystyle\int_0^1 x^3\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int_1^3 |2-x|\,\mathrm{d}x$ c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t$

   d) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t}{1-e^{-x^2}}$

2. Calcule a área de cada uma das seguintes regiões.

   a) $\{(x,y) : y \geq e^x, y \geq e^{-x}, y \leq 2\}$

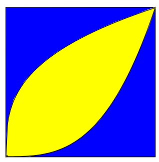
   b) $\{(x,y) : 0 \leq x \leq 1, -e^x \leq y \leq x^2\}$

   c) $\{(x,y) : y \geq (x-1)^2, y \leq 1-x^2\}$

   d) $\{(x,y) : \ln x \leq y \leq e^x, y \geq -x+1, x \leq e\}$

3. Calcule a área da região delimitada pela curva $y = x^3$, pela recta $y = 1$ e pela recta com declive -2 e que passa no ponto (-1,-1).

4. Um industrial de cerâmica pretende fabricar azulejos quadrados com duas cores, azul e amarelo, com o padrão ilustrado na figura ao lado. A região amarela é delimitada pelos gráficos das funções x^α e $x^{\frac{1}{\alpha}}$, com $\alpha > 1$. Determine α de forma que as duas cores ocupem áreas iguais.



5. Determine uma expressão para a função $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t, \text{ com } f(t) = \begin{cases} 2t & \text{se } t \leq 0 \\ e^t - 1 & \text{se } t > 0 \end{cases},$$

onde não figure o símbolo do integral.

6. Considere a função $\varphi : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t, \text{ com } f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{t+1}} & \text{se } 0 \leq t \leq 1 \\ \frac{1}{1+t^2} & \text{se } t > 1 \end{cases}.$$

   a) Determine uma expressão para a função φ que não utilize o símbolo do integral.

   b) Calcule $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

7. Estude a natureza de cada um dos seguintes integrais impróprios.

   a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-2x}}{x}\,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{2+x^2}\,\mathrm{d}x$.

8. Calcule o valor de cada um dos seguintes integrais impróprios.

   a) $\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x}\,\mathrm{d}x$.

9. Determine β que satisfaz $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \beta e^{-5|x|}\,\mathrm{d}x = 1$.

10. Considere a função $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$F(x) = \int_{-1}^x f(t)\,\mathrm{d}t, \text{ com } f(t) = \begin{cases} 1 - e^{-t} & \text{se } t < 0 \\ \frac{\operatorname{arctg} t}{1+t^2} & \text{se } t \geq 0 \end{cases}.$$

   a) Calcule $F(1)$.

   b) Determine $F'(x)$.

   c) Para $g(x) = x^2$, identifique $(F(g(x)))'$.

   d) Determine $c \in \mathbb{R}$ tal que $\displaystyle\int_{-1}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = F(1) + c$.

11. Considere a função $f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ \dfrac{1}{1+x^2} & \text{se } x > 1 \end{cases}$.

a) Calcule $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{dx}$.

b) Indique uma expressão para $\int_0^x f(t)\,\mathrm{dt}$, com $x \in \mathbb{R}_0^+$, em que não figure o símbolo do integral.

c) Calcule $\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{dx}$.

d) Diga, justificando, se é verdadeira ou falsa a afirmação

$$\text{existe um par } x_1, x_2 \in \mathbb{R}_0^+,\ \text{com } x_1 < x_2,\ \text{tal que } \int_0^{x_1} f(t)\,\mathrm{dt} > \int_0^{x_2} f(t)\,\mathrm{dt}.$$

12. Considere as funções $f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{se } x < 0 \\ \dfrac{1}{x+1} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$ e $F(x) = \int_{-1}^{x} f(t)\,\mathrm{dt}$, com $x \in \mathbb{R}$.

a) Calcule $F(1)$ e $F'(1)$.

b) Indique, justificando, a natureza do integral impróprio $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{dx}$.

c) Diga, justificando, se é verdadeira ou falsa a afirmação

$$\text{existe um par } x_1 \neq x_2 \in \mathbb{R} \text{ tal que } F(x_1) = F(x_2).$$

13. Considere a função $g(x) = \int_1^x \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{dt}$, com $x \in \mathbb{R}$.

a) Calcule $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}$.

b) Determine a equação da recta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa $x = 1$.

c) Prove que não existe $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

14. Considere a função $f(x) = \int_0^x |2-t|\,\mathrm{dt}$, com $x \in \mathbb{R}_0^+$.

a) Determine a expressão analítica de f.

b) Determine f'.

c) Estude o integral impróprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} |2-t|\,\mathrm{dt}$.

15. Considere a função $G(x) = \displaystyle\int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{dt}$, com $x \in \mathbb{R}$.

a) Estude a monotonia e a variação de sinal da função G em $\mathbb{R}$.

b) Utilizando a fórmula de MacLaurin, mostre que $G(x) \geq \dfrac{x^3}{3} + x,\ \forall x > 0$.