Capítulo 1

Cálculo matricial e sistemas de equações lineares

EXERCÍCIOS 1.

1. Considere as matrizes

$$A=\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 7 & 1 \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 2 & -3 & -4 \end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \text{ e } D=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

   Simplifique e calcule, sempre que possível, as seguintes expressões.

   a) $(5A-A)-(B-2B)$ b) $(2A-B)^\top - C$ c) $(2(A^\top - C)^\top + B)^\top$
   d) $(B^\top - C)^\top + 2B^\top$ e) $D+D^\top$ f) $D-D^\top$.

2. Identifique, se existirem, escalares α e β tais que

$$\alpha\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 8 & -12 \end{bmatrix}.$$

EXERCÍCIO 2. Considere as matrizes

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},\ u=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ e } v=\begin{bmatrix} 10 \\ 100 \\ 1000 \end{bmatrix}.$$

Calcule, sempre que possível, AB, BA, $BA^\top$, CC, BI e IB onde I denota a matriz identidade de ordem conveniente, $u^\top u$, $u\,u^\top$, Bu, Bv, $B[\,u\ \ v\,]$, $B(u+v)$ e B^3.

EXERCÍCIOS 3. Resolva cada um dos seguintes sistemas de equações lineares usando o método de eliminação de Gauss.

1. $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3 = 6 \\ 2x_1+5x_2+x_3 = 9 \\ x_1+4x_2-6x_3 = 1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x+2y+3z = 0 \\ x+y+z = 10 \\ x+2z = 0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3+x_4 = 4 \\ 2x_1+4x_2-x_3+2x_4 = 11 \\ x_1+x_2+2x_3+3x_4 = 1 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+x_4-x_5 = 2 \\ x_3+x_4+x_5 = -1 \\ -x_1-2x_2-x_3+2x_4+x_5 = 0 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4 = 1 \\ 2x_1+x_2-x_3+2x_4 = 9 \\ x_1+2x_2+x_3-x_4 = -6 \\ x_1+x_2-2x_3+x_4 = 7 \end{cases}.$

EXERCÍCIOS 4.

1. Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.
   Resolva a equação matricial $Ax = 3x + b$, com $x \in \mathbb{R}^3$.

2. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -3 \\ \alpha & 0 & \alpha & -\alpha \\ 0 & 1 & \alpha & -4 \end{bmatrix}$.
   Determine os valores de α para os quais $(-1,0,2,1)$ é solução do sistema $Ax = \vec{0}$.

3. Seja $Ax = b$ um sistema que admite soluções não nulas u e v. Para que valores de b o vetor $u+v$ ainda é solução de $Ax = b$? Justifique.

EXERCÍCIOS 5.

1. Para que valores de b o sistema

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2 = 4 \\ 4x_1+6x_2 = b \end{cases}$$

   é impossível?

2. Indique uma equação a juntar a

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - \ x_3 & = & 4 \\ \ x_1 - x_2 + 3x_3 & = & 2 \end{cases}$$

de forma a obter um sistema impossível.

3. Classifique e interprete geometricamente o sistema de equações lineares correspondente a cada uma das seguintes matrizes ampliadas.

a) $\left[\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 7 \\ 4 & 1 & 9 \\ 2 & -3 & 3 \end{array}\right]$

b) $\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 4 & 11 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right]$

c) $\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right]$.

EXERCÍCIOS 6.

1. Discuta cada um dos seguintes sistemas lineares para todos os valores dos parâmetros.

a) $\begin{cases} x \quad - \quad z & = 1 \\ \quad y + \ az & = 0 \\ -x + y + 2az & = 1 \end{cases}, \ a \in \mathbb{R}$

b) $\begin{cases} x_1 + \ x_2 - \ x_3 & = 1 \\ \quad 2x_2 + 2x_3 & = \gamma \\ x_1 + \gamma x_2 + \gamma x_3 & = 1 \end{cases}, \ \gamma \in \mathbb{R}.$

c) $\begin{cases} ax \quad + 2z & = 2 \\ x + 2y & = 1 \\ x - 2y + bz & = 3 \end{cases}, \ a, b \in \mathbb{R}$

d) $\begin{cases} 2x \quad + 4y + bz & = 2 \\ x + (d+2)y & = 1 \\ x \quad + 2y + bz & = 1 \\ x \quad + 2y & = c \end{cases}, \ b, c, d \in \mathbb{R}.$

2. Discuta os sistemas $Ax = b$ para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, com

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -\alpha \\ 2 & 1 & 1 \\ \alpha & 0 & 2 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 1 \\ \beta \\ \beta - \alpha \end{bmatrix}$

(Exercício do 1º teste de 12 de novembro de 2022)

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 2 \\ 1 & 1 & \alpha + 2 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} \beta \\ 2\alpha \\ 0 \end{bmatrix}$.

EXERCÍCIO 7. Considere os sistemas lineares com matrizes ampliadas

$$\left[\begin{array}{rrr|c} 1 & 0 & -1 & b_1 \\ 0 & 1 & a & b_2 \\ -1 & 1 & 2a & b_3 \end{array}\right], \text{ com } a, b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}.$$

a) Para que valores de a os sistemas são possíveis, independentemente dos valores dos parâmetros b_1, b_2, b_3?

b) Para que valores de b_1, b_2, b_3 os sistemas são possíveis, independentemente do valor do parâmetro a?

c) Atribua a a, b_1, b_2, b_3 valores que tornem o sistema

c1) impossível,

c2) indeterminado.

EXERCÍCIOS 8.

1. Seja E uma matriz em escada do tipo $m \times n$.

   a) Quantos *pivots* podem existir em E?

   b) Qual é a relação entre o número de *pivots* e o número de linhas nulas de E?

2. Seja S um sistema de equações lineares do tipo $m \times n$. Diga, justificando, se cada uma das seguintes afirmações é verdadeira ou falsa.

   a) Se $m < n$, então S é indeterminado.

   b) Se S é possível e $m < n$, então é indeterminado com exatamente $n - m$ variáveis livres.

   c) Se $m > n$, então S é impossível.

   d) Se S é possível e $m \geq n$, então S é determinado.

e) Se S é possível e determinado então $m = n$ e a matriz reduzida obtida por aplicação do método de Gauss à matriz dos coeficientes de S é a matriz identidade.

EXERCÍCIO 9. Verifique que $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & -6 \end{bmatrix}$.

EXERCÍCIOS 10.

1. Determine, caso exista, a inversa de cada uma das seguintes matrizes.

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. Indique os valores do parâmetro λ para os quais a matriz $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & 3 \\ 1 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$ é invertível.

3. Mostre que a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ é não singular e utilize A^{-1} para resolver o sistema $Ax = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

4. Sejam A, B e C matrizes invertíveis da mesma ordem.

   a) É correto afirmar que $A + B$ é invertível?
   b) Será que a matriz A^3BC^{-1} é invertível?
   d) Prove que se $AB = AC$ então $B = C$.

5. Seja A uma matriz quadrada tal que $A^2 = I - A$.

   (a) A matriz A será invertível? Se sim, qual a sua inversa?
   (b) Prove que $A^3 - 2A + I = 0$.

6. Sejam A uma matriz quadrada de ordem 3 invertível e $b, c \in \mathbb{R}^3$.

   a) Classifique os sistemas $Ax = b$ e $A^{-1}x = c$.
   b) Prove que os sistemas $Ax = b$ e $A^{-1}x = c$ são equivalentes sse $b = A^2c$.

c) Sejam u, v e w as soluções dos sistemas

$$Ax = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, Ax = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } Ax = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \text{ respetivamente.}$$

Determine a inversa de A em função dos vetores u, v e w.

7. Sejam A, B, C e X matrizes que satisfazem a equação matricial

$$\left[(AX)^T + BC\right]^{-1} = I,$$

em que $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $C = [\,2 \;\; 3\,]$.

(a) Qual o tipo da matriz X?

(b) Determine X.

8. Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes.

i) A é invertível.

ii) $Ax = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

iii) O sistema $Ax = b$ é possível para todo o vetor b de $\mathbb{R}^n$.