Interpretação geométrica de sistemas lineares - exercício

Exercício na aula

Considere o sistema linear com parâmetros $c, d \in \mathbb{R}$,

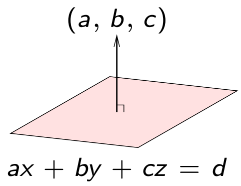
$$\begin{cases} x + 2y + 3z & = & 6 \\ 2x + 4y + cz & = & d \end{cases}$$

Discuta e interprete geometricamente o sistema anterior para todos os valores dos parâmetros $c, d \in \mathbb{R}$.

Resolução: comecemos por recordar que cada equação linear do tipo

$$ax + by + cz = d,$$

onde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ com a, b, c não todos nulos define um plano no espaço $(\mathbb{R}^3)$ com vetor normal (a, b, c).



Logo o sistema anterior representa a intersecção de 2 planos no espaço.

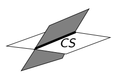
Resolução do exerecício (cont.)

Aplicando a fase descendente do método de eliminação de Gauss à matriz ampliada $[A|b]$ do sistema linear do slide 51 obtém-se:

$$[A \,|\, b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 4 & c & d \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 - 2L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & c-6 & d-12 \end{array}\right] = [A' \,|\, b'].$$

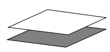
Discussão e interpretação geométrica do sistema:

- Para $c \neq 6$ e d arbitrário o sistema é PI com 1 variável livre (y). Neste caso os vetores normais aos planos não são múltiplos entre si e o sistema representa 2 planos concorrentes numa reta. Logo CS = reta.



- Para $c = 6$ temos 2 casos:
  - Se $d = 12$ o sistema é PI com 2 variáveis livres (y e z). Neste caso as duas equações são equivalentes e o sistema representa 2 planos coincidentes. Logo CS = plano.

  - Se $d \neq 12$ o sistema é IMP. Neste caso o sistema representa 2 planos paralelos, não coincidentes. Logo $CS = \emptyset$.



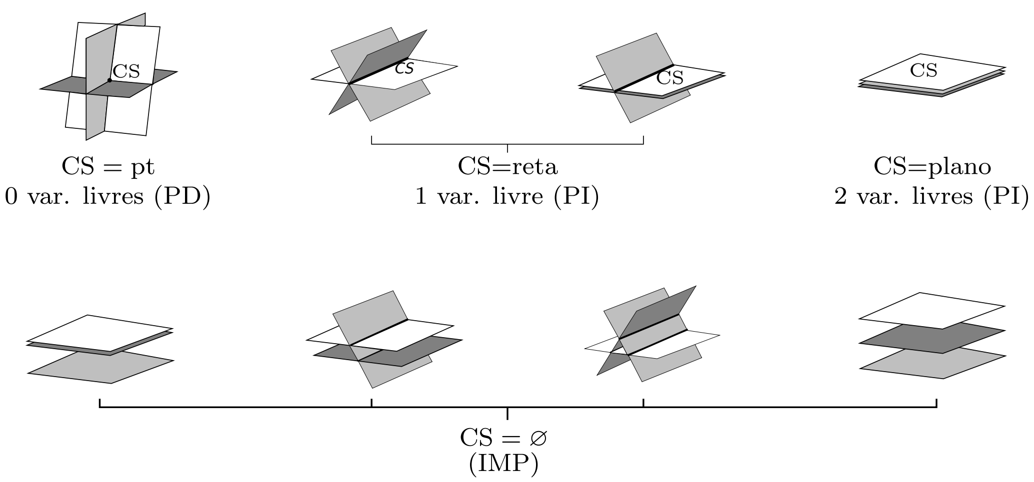
Interpretação geométrica de sistemas de equações lineares

Em geral, tem-se o seguinte:

- Um sistema linear a m equações e n variáveis representa a intersecção de:
  - m retas em $\mathbb{R}^2$ (plano), se $n = 2$,
  - m planos em $\mathbb{R}^3$ (espaço), se $n = 3$,
  - m hiperplanos em $\mathbb{R}^n$, se $n \geq 4$.
- O número de variáveis livres de um sistema linear (possível) determina o tipo de CS que esse sistema possui. Por exemplo:
  - Se o número de variáveis livres for zero, o CS é um **ponto**
  - Se o número de variáveis livres for um, o CS é uma **reta**
  - Se o número de variáveis livres for dois, o CS é um **plano**
- Iremos principalmente interpretar sistemas lineares com 2 e 3 variáveis, ou seja, cujos CS estão contidos no plano e no espaço.

Geometria dos sistemas lineares a 3 equações e 3 incógnitas

- Geometricamente existem os 8 casos distintos representados na seguinte figura:



TPC (Desafio)

Dar exemplos de sistemas com 3 equações e 3 variáveis para cada um dos 8 casos anteriores

Inversa de uma matriz

Definição de inversa

Uma matriz quadrada A de ordem n diz-se *invertível* ou *não singular* se existir uma matriz quadrada B da mesma ordem tal que

$$AB = I_n \qquad \text{e} \qquad BA = I_n,$$

onde I_n denota a matriz identidade de ordem n. Caso contrário, A diz-se *singular*. A matriz B, quando existe, designa-se por *inversa* de A

Por exemplo, $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ é invertível com inversa $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$.

De facto, tem-se

$$\begin{aligned} AB &= \left[\begin{array}{cc} 2 & 1 \\ \hline 3 & 2 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ BA &= \left[\begin{array}{cc} 2 & -1 \\ \hline -3 & 2 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Unicidade da inversa

Proposição

A inversa de uma matriz A, quando existe, é única e denota-se por A^{-1}.

Demonstração

Consideremos inversas arbitrárias B e C de A. Queremos mostrar que têm que ser a mesma. Como B é inversa de A tem-se, em particular,

$$BA = I.$$

Multiplicando ambos os membros desta igualdade à direita por C tem-se

$$BAC = C,$$

donde resulta imediatamente $B = C$ uma vez que $AC = I$. $\square$

Ainda sobre a inversa. . .

Observação

Se A e B são matrizes quadradas de ordem n pode-se mostrar que

$$AB = I_n \quad \Leftrightarrow \quad BA = I_n,$$

Portanto para provar que A é invertível com inversa B basta mostar uma das relações,

$$AB = I_n \quad \text{ou} \quad BA = I_n,$$

concluindo-se nessa altura que A e B são inversas uma da outra.

Exercícios na aula

- Mostre que se B é a inversa de A^2 então AB é inversa de A
- Determine, caso exista, a inversa da matriz $\operatorname{diag}(2, 3)$.

TPC

Mostre que se $A_{n\times n}$ verifica $A^3 - 3A - I_n = 0$ então A é invertível e indique a respetiva inversa.

Propriedades da inversa

Proposição

Sejam A, B matrizes invertíveis da mesma ordem. Então:

1. A^{-1} é invertível e tem-se $(A^{-1})^{-1} = A$.
2. λA é invertível para todo o $\lambda \neq 0$ e tem-se $(\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1}A^{-1}$.
3. AB é invertível e tem-se $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, ou seja, a inversa do produto é o produto das inversas, pela ordem inversa([3]).
4. A^k é invertível para todo o $k \in \mathbb{N}$ e tem-se $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$.
5. A^T é invertível e tem-se $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Potências negativas de matrizes invertíveis

Se A é uma matriz invertível, define-se

$$A^{-k} = (A^{-1})^k, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

[3] Mais geralmente, se $A_1, A_2, \ldots, A_k$ são invertíveis da mesma ordem, então $A_1A_2\cdots A_k$ é também invertível e tem-se $(A_1A_2\cdots A_k)^{-1} = A_k^{-1}\cdots A_2^{-1}A_1^{-1}$.