Espaço gerado/espaço das colunas é o subespaço maximal

Exercício na aula

Aplicando o algoritmo do slide 101 calcule

$$\langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle = \langle (1,1,0), (1,0,1), (0,1,1), (1,1,1) \rangle.$$

Resolução

Seja $A = [v_1\ v_2\ v_3\ v_4]$. Tem-se

$$\langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle = \mathcal{C}(A) = \{ b = (b_1, b_2, b_3) : Ax = b \ \text{ é possível} \}.$$

Aplicando a fase descendente do método de eliminação de Gauss a $[A|b]$ obtém-se,

$$[A|b] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & b_! \\ 1 & 0 & 1 & 1 & b_2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & b_3 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 - L_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & b_1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & b_2 - b_1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & b_3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_3 + L_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & b_1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & b_3 + b_2 - b1 \end{array}\right] = [A'|b'].$$

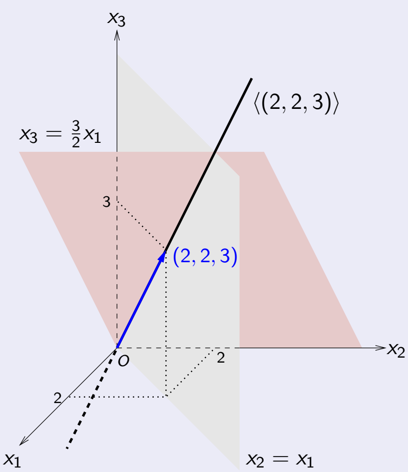
Como a matriz em escada A' não tem linhas nulas (1º caso do algoritmo do slide 101), não há restrições a impor ao vetor $b = (b_1, b_2, b_3)$ para o sistema ser possível.
Logo $\langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle = \mathcal{C}(A) = \mathbb{R}^3$, isto é, v_1, v_3, v_3, v_4 geram o subespaço maximal.

Espaço gerado/espaço das colunas é definido por equações

Exercício na aula

Considere o subespaço $\langle (2,2,3) \rangle = \{ b : b = \alpha(2,2,3) \text{ com } \alpha \in \mathbb{R} \}$, que define a reta de $\mathbb{R}^3$ que passa na origem e tem vetor diretor $v = (2,2,3)$. Aplicando o algoritmo do slide 101 mostre que esta reta corresponde à intersecção dos planos abaixo:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 = 0 \\ -\dfrac{3}{2}x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$$



Resolução do exercício

Denotando por A a matriz com a única coluna $v = (2,2,3)$, $A = [\ v\ ]$, tem-se

$$\begin{aligned}\langle(2,2,3)\rangle = \mathcal{C}(A) &= \{b = (b_1,b_2,b_3)\ :\ Ax = b \text{ é possível}\}\\ &= \{b = (b_1,b_2,b_3)\ :\ [A|b] \text{ é possível}\}.\end{aligned}$$

- Aplicando a fase descendente à matriz $[\,A|b\,]$ vem,

$$[A|b] = \left[\begin{array}{c|c} 2 & b_1 \\ 2 & b_2 \\ 3 & b_3 \end{array}\right] \xrightarrow[]{\substack{L_2 - L_1 \\ L_3 - \frac{3}{2}L_1}} \left[\begin{array}{c|c} 2 & b_1 \\ 0 & b_2 - b_1 \\ 0 & b_3 - \frac{3}{2}b_1 \end{array}\right] = [A'|b'].$$

- Tem-se que o sistema $Ax = b$ é possível se e só se as componentes do vetor b' associadas às linhas nulas da matriz em escada A' forem nulas, isto é, $b_2' = b_2 - b_1 = 0$ e $b_3' = b_3 - \frac{3}{2}b_1 = 0$ (2º caso do algoritmo do slide 101). Logo,

$$\langle(2,2,3)\rangle = \mathcal{C}(A) = \left\{(b_1,b_2,b_3)\ :\ b_2 - b_1 = 0,\ b_3 - \frac{3}{2}b_1 = 0\right\},$$

que corrresponde à interseção dos planos $x_2 - x_1 = 0$ e $x_3 - \frac{3}{2}x_1 = 0$ como se pretendia mostrar.

Independência linear

Definição de independência linear

Sejam $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^m$.

- $\{v_1, \ldots, v_n\}$ diz-se linearmente independente (l.i.) se

$$\forall \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}\colon \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = \vec{0} \Rightarrow \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0,$$

isto é, se a combinação linear com **todos** os coeficientes nulos,

$$0v_1 + 0v_2 + \cdots + 0v_n = \vec{0},$$

for a **única** forma de escrever o vetor nulo como CL de $v_1, \ldots, v_n$.

- Caso contrário $\{v_1, \ldots, v_n\}$ diz-se linearmente dependente (l.d.).

Por outras palavras, $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é linearmente dependente se existem coeficientes **não todos nulos** $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tais que,

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = \vec{0}.$$

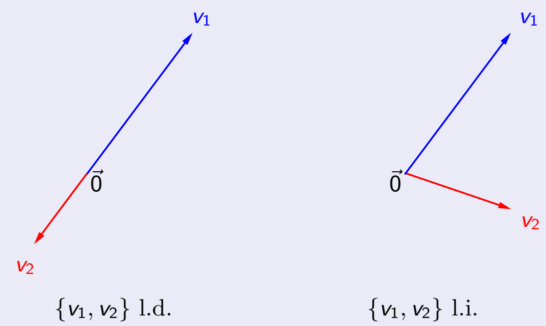
(In)dependência linear - exemplos

- $\{(1,3,-1)\}$ é l.i. pois $\alpha\,(1,3,-1)=(0,0,0) \;\Rightarrow\; \alpha=0$.
- $\{\vec{0}\}$ é l.d. pois $\alpha\,\vec{0}=\vec{0} \not\Rightarrow \alpha=0$ (por exemplo, $2\,\vec{0}=\vec{0}$).
- $\{(1,3,-1),(2,6,-2)\}$ é l.d. uma vez que conseguimos obter o vetor nulo como CL dos vetores $(1,3,-1)$ e $(2,6,-2)$, com coeficientes **não todos nulos** como,
$$-2\,(1,3,-1)+1\,(2,6,-2)=(0,0,0).$$
Neste caso os vetores são múltiplos entre si, isto é, são colineares.
- $\{(1,3,-1),(0,1,5)\}$ é l.i. pois
$$\alpha_1\begin{bmatrix}1\\3\\-1\end{bmatrix}+\alpha_2\begin{bmatrix}0\\1\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha_1 = 0\\ 3\,\alpha_1+\alpha_2=0\\ -\alpha_1+\alpha_2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha_1=0\\ \alpha_2=0\end{cases}$$
Neste caso os vetores não são múltiplos entre si, isto é, são não colineares.

Caso dos conjuntos de cardinalidade ≤ 2

Independência linear de conjuntos com um e com dois vetores

- $\{\vec{v}\}$ é linearmente independente $\Leftrightarrow$ $v\neq\vec{0}$.
- $\{v_1,v_2\}$ é linearmente independente $\Leftrightarrow$ v_1 e v_2 são não colineares.



Decidir sobre a independência linear de conjuntos com mais que dois vetores não é, em geral, imediato. Por essa razão vamos começar por dar uma caracterização alternativa de conjunto linearmente independente.

Caracterização alternativa de (in)dependência linear

Teorema

Consideremos $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^m$ e sejam $A = [\, v_1 \;\; v_2 \;\; \cdots \;\; v_n \,]$ e A' matriz em escada obtida a partir de A aplicando operações elementares. Tem-se que:

- $\{v_1, \dots, v_n\}$ é linearmente **independente** sse $Ax = \vec{0}$ for **determinado**, isto é, todas as colunas de A' tiverem pivot ($\Leftrightarrow \operatorname{car}(A) = n$).

- $\{v_1, \dots, v_n\}$ é linearmente **dependente** sse $Ax = \vec{0}$ for **indeterminado**, isto é, existirem as colunas sem pivot em A' ($\Leftrightarrow \operatorname{car}(A) < n$).

  Neste caso tem-se $\mathcal{N}(A) \neq \{\vec{0}\}$ e cada solução $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathcal{N}(A)$ origina a uma CL distinta,
  $$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = \vec{0}.$$

O teorema decorre imediatamente dos resultados do slide 97 com $b = \vec{0}$, que mostram que $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ verificam
$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = \vec{0},$$
se e só se $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ é solução de $Ax = \vec{0}$, isto é, $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathcal{N}(A)$.

(In)dependência linear via método de Gauss

A caracterização anterior permite usar o método de eliminação de Gauss para decidir a independência linear de conjuntos com n vetores em que n arbitrário.

Exercício na aula

Considere os vetores $v_1 = (1, \alpha, 1)$, $v_2 = (0, 1, -1)$ e $v_3 = (\alpha, 3, 3)$, com $\alpha \in \mathbb{R}$. Decida sobre a independência linear de $\{v_1, v_2, v_3\}$ em função de α.

Resolução

Consideremos a matriz $A = [v_1 \;\; v_2 \;\; v_3]$. Aplicando a fase descendente do método de eliminação de Gauss à matriz A vem,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ \alpha & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 - L_2]{L_2 - \alpha L_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 3-\alpha^2 \\ 0 & -1 & 3-\alpha \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{L_3 + L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 3-\alpha^2 \\ 0 & 0 & 6-\alpha-\alpha^2 \end{bmatrix} = A'.$$

Tem-se $\{v_1, v_2, v_3\}$ l.i. $\Leftrightarrow$ $Ax = \vec{0}$ determinado $\Leftrightarrow$ todas as colunas de A' têm pivot $\Leftrightarrow 6 - \alpha - \alpha^2 \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(-1)6}}{2(-1)}$ (fórmula resolvente) $\Leftrightarrow \alpha \neq -3, 2$.
Daqui resulta ainda que $\{v_1, v_2, v_3\}$ l.d. $\Leftrightarrow \alpha = -3$ ou $\alpha = 2$.

Cardinalidade máxima de um conjunto l.i.

Da relação $\text{car}(A_{m\times n}) \leq \min\{m, n\}$ e da caracterização de independência linear de um conjunto $\{v_1, \ldots, v_n\}$ dada no slide 108,

$$\{v_1, \ldots, v_n\} \text{ l.i.} \quad \Leftrightarrow \quad \text{car}(A) = n,$$

onde $A = [v_1\ v_2 \cdots v_n]$, deduz-se o seguinte resultado.

Proposição

Um conjunto linearmente independente de vetores de $\mathbb{R}^m$ possui no máximo m vetores

- Por exemplo, o conjunto $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, em que $v_1 = (1, 2, 1, 1)$, $v_2 = (0, 1, -1, 1)$, $v_3 = (1, 3, 1, 4)$, $v_4 = (0, 0, 1, 1)$ e $v_5 = (0, 0, 0, 1)$, é linearmente dependente pois é formado por 5 de vetores de $\mathbb{R}^4$.

Dependência linear e combinações lineares

Vimos que um conjunto formado por 2 vetores era l.d. se e só se um dos vetores era múltiplo do outro. Vejamos o que se passa com conjuntos com 3 vetores.

Consideremos $u, v, w \in \mathbb{R}^m$.

- Se w é CL de u e v, isto é, $w = \alpha u + \beta v$ com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, então $\{u, v, w\}$ é l.d. pois podemos escrever o vetor nulo como CL de u, v, w com coeficientes **não todos nulos**. De facto,

$$\alpha\, u + \beta\, v - 1\, w = \vec{0}.$$

- Reciprocamente se $\{u, v, w\}$ é l.d. então por definição existem α, β, γ, **não todos nulos** tais que

$$\alpha u + \beta v + \gamma w = \vec{0}.$$

  Se $\alpha \neq 0$ podemos escrever $u = -\frac{\beta}{\alpha} v - \frac{\gamma}{\alpha} w$ e portanto u é CL de v e w. Analogamente se mostra que se $\beta \neq 0$ [$\gamma \neq 0$] então v [w] é CL dos restantes 2 vetores (que fica como exercício para os alunos).

Logo $\{u, v, w\}$ é l.d. se e só se um dos vetores é CL dos restantes 2 vetores.

Aplicando o mesmo tipo de ideias a conjuntos com um número arbitrário de vetores obtemos a caracterização de dependência linear do próximo slide.

Noção mais intuitiva do conceito de dependência linear

Teorema (Caracterização da dependência linear em termos de CL)

Um conjunto com dois ou mais vetores é linearmente dependente se e só se pelo menos um dos vetores do conjunto for combinação linear dos restantes vetores do conjunto.

Consequências

- Um conjunto de vetores que contenha o vetor nulo é l.d.
- Um conjunto de vetores que contenha um conjunto l.d. de vetores é l.d.
  Em particular, se o conjunto contiver vetores colineares é l.d.
- Reciprocamente, um conjunto de vetores não vazio que esteja contido um conjunto linearmente independente ainda é linearmente independente.

Exemplos

- $\{v_1, v_2, v_3\} = \{(1,2,3,4),(1,1,1,1),(2,3,4,5)\}$ é l.d. pois $v_3 = v_1 + v_2$.
  Logo $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ é l.d. para todo o $v_4 \in \mathbb{R}^4$, pois $v_3 = v_1 + v_2 + 0v_4$.
- $\{(1,1,1,1),(1,1,1,0),(1,1,0,0),(1,0,0,0)\}$ é l.i. (verifique).
  Logo $\{(1,1,1,1),(1,1,1,0),(1,1,0,0)\}$ é também l.i.

TPC: verifique que no 1º caso $(1,1,-1,0) \in \mathcal{N}(A)$ com $A = [v_1\ v_2\ v_3\ v_4]$. Porquê?