Capítulo 1

Cálculo matricial e sistemas de equações lineares

EXERCÍCIOS 1.

1. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 7 & 1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 2 & -3 & -4 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

   Simplifique e calcule, sempre que possível, as seguintes expressões.

   a) $(5A-A)-(B-2B)$ b) $(2A-B)^\top - C$ c) $(2(A^\top - C)^\top + B)^\top$
   d) $(B^\top - C)^\top + 2B^\top$ e) $D + D^\top$ f) $D - D^\top$.

   a) $\begin{bmatrix} 17 & 0 & 1 \\ 10 & 25 & 0 \end{bmatrix}$, **b)** $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -7 & 18 \\ 2 & 10 \end{bmatrix}$, **c)** $\begin{bmatrix} 11 & 10 \\ 0 & 13 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$, **d)** Não definido, **e)** $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$, **f)** $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

2. Identifique, se existirem, escalares α e β tais que

$$\alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 8 & -12 \end{bmatrix}.$$

   $\alpha = -3,\ \beta = \frac{1}{2}$

EXERCÍCIO 2. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},\ u = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ e } v = \begin{bmatrix} 10 \\ 100 \\ 1000 \end{bmatrix}.$$

Calcule, sempre que possível, AB, BA, $BA^\top$, CC, BI e IB onde I denota a matriz identidade de ordem conveniente, $u^\top u$, $u\,u^\top$, Bu, Bv, $B[\,u\ \ v\,]$, $B(u+v)$ e B^3.

$$AB=\begin{bmatrix} 8 & -4 & -2\\ -11 & -2 & 9\end{bmatrix},\ \ BA \text{ não definida},\ \ BA^T=\begin{bmatrix} 4 & 1\\ 2 & 3\\ 3 & -6\end{bmatrix},\ CC=\begin{bmatrix} 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},$$

$$BI=IB=B,\quad u^Tu=14,\ \ uu^T=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 6\\ 3 & 6 & 9\end{bmatrix},\ \ Bu=\begin{bmatrix} 5\\ 5\\ -3\end{bmatrix},\ \ Bv=\begin{bmatrix} 1020\\ 2960\\ -190\end{bmatrix},$$

$$B[\,u\ \ v\,]=\begin{bmatrix} 5 & 1020\\ 5 & 2960\\ -3 & -190\end{bmatrix},\ B(u+v)=\begin{bmatrix} 1025\\ 2965\\ -193\end{bmatrix} \text{ e } B^3=\begin{bmatrix} 20 & -4 & -1\\ 10 & 8 & -23\\ 15 & 10 & 10\end{bmatrix}$$

EXERCÍCIOS 3. Resolva cada um dos seguintes sistemas de equações lineares usando o método de eliminação de Gauss.

1. $$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3 = 6\\ 2x_1+5x_2+x_3 = 9\\ x_1+4x_2-6x_3 = 1\end{cases}$$
   $CS=\{(-1,2,1)\}$ (PD)

2. $$\begin{cases} x+2y+3z = 0\\ x+y+z = 10\\ x+2z = 0\end{cases}$$
   $CS=\{(\frac{40}{3},\frac{10}{3},-\frac{20}{3})\}$ (PD)

3. $$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3+x_4 = 4\\ 2x_1+4x_2-x_3+2x_4 = 11\\ x_1+x_2+2x_3+3x_4 = 1\end{cases}$$
   $CS=\{(x_1,x_2,x_3,x_4): x_1=1-5x_4, x_2=2+2x_4, x_3=-1, x_4\in\mathbb{R}\}$ (PI)

4. $$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+x_4-x_5 = 2\\ x_3+x_4+x_5 = -1\\ -x_1-2x_2-x_3+2x_4+x_5 = 0\end{cases}$$
   $CS=\{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5): x_1=13-2x_2+8x_5, x_3=-5-3x_5, x_4=4+2x_5, x_2,x_5\in\mathbb{R}\}$ (PI)

5. $$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4 = 1\\ 2x_1+x_2-x_3+2x_4 = 9\\ x_1+2x_2+x_3-x_4 = -6\\ x_1+x_2-2x_3+x_4 = 7\end{cases}.$$
   $CS=\{(1,-1,-2,3)\}$ (PD)

EXERCÍCIOS 4.

1. Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.
   Resolva a equação matricial $Ax = 3x + b$, com $x \in \mathbb{R}^3$.

2. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -3 \\ \alpha & 0 & \alpha & -\alpha \\ 0 & 1 & \alpha & -4 \end{bmatrix}$.
   Determine os valores de α para os quais $(-1, 0, 2, 1)$ é solução do sistema $Ax = \vec{0}$.

3. Seja $Ax = b$ um sistema que admite soluções não nulas u e v. Para que valores de b o vetor $u + v$ ainda é solução de $Ax = b$? Justifique.

a) $CS = \left\{\left(\frac{3}{10}, -\frac{6}{5}, \frac{7}{5}\right)\right\}$ **b)** $\alpha = 2$ **c)** $b = \vec{0}$

EXERCÍCIOS 5.

1. Para que valores de b o sistema

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 & = & 4 \\ 4x_1 + 6x_2 & = & b \end{cases}$$

   é impossível?

   $b \neq 8$

2. Indique uma equação a juntar a

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - \ x_3 & = & 4 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 & = & 2 \end{cases}$$

   de forma a obter um sistema impossível.

   Por exemplo, $3x_1 + 2x_3 = 5$ (como exercício adicional interprete geometricamente o sistema impossível que se obtém com esta solução no contexto dos 8 casos do esquema da página 28 do Texto de Apoio e indique uma solução alternativa para este exercício que corresponda geometricamente a um caso distinto

3. Classifique e interprete geometricamente o sistema de equações lineares correspondente a cada uma das seguintes matrizes ampliadas.

   a) $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 7 \\ 4 & 1 & 9 \\ 2 & -3 & 3 \end{array}\right]$

b) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 4 & 11 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right]$

c) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right]$.

a) IMP - representa 4 retas não concorrentes num ponto **b)** PD - representa 3 planos que se intersectam num único ponto (1º caso do esquema da página 28 do Texto de Apoio), **c)** PI - representa 3 planos não paralelos nem coincidentes que são concorrentes numa reta (2º caso do esquema da página 28 do Texto de Apoio)

Verifique adicionalmente que o ponto de intersecção referido em b) tem coordenadas $(\frac{8}{5}, -\frac{7}{5}, \frac{8}{5})$ e que a reta de intersecção referida em c) passa na origem e tem vetor diretor $(-3, 4, 1)$.

EXERCÍCIOS 6.

1. Discuta cada um dos seguintes sistemas lineares para todos os valores dos parâmetros.

a) $\begin{cases} x - z = 1 \\ y + az = 0 \\ -x + y + 2az = 1 \end{cases}, \ a \in \mathbb{R}$

b) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_2 + 2x_3 = \gamma \\ x_1 + \gamma x_2 + \gamma x_3 = 1 \end{cases}, \ \gamma \in \mathbb{R}.$

c) $\begin{cases} ax + 2z = 2 \\ x + 2y = 1 \\ x - 2y + bz = 3 \end{cases}, \ a, b \in \mathbb{R}$

d) $\begin{cases} 2x + 4y + bz = 2 \\ x + (d+2)y = 1 \\ x + 2y + bz = 1 \\ x + 2y = c \end{cases}, \ b, c, d \in \mathbb{R}.$

a) Se $a \neq 1$ é PD. Se $a = 1$ é IMP, **b)** PD $\forall \gamma$, **c)** Se $ab \neq 4$ é PD. Se $ab = 4$ com $a \neq 1$ é IMP. Se $a = 1$ e $b = 4$ é PI (com variável livre x_3), **d)** Se $c \neq 1$ é IMP $\forall b, d$. Se $c = 1$ e $b, d \neq 0$ é PD. Se $c = 1$ e $bd = 0$ é PI (com variáveis livres x_2 e x_3 se $b = d = 0$, com variável livre x_3 se $b = 0$ e $d \neq 0$ e com variável livre x_2 se $b \neq 0$ e $d = 0$)

2. Discuta os sistemas $Ax = b$ para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, com

   (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -\alpha \\ 2 & 1 & 1 \\ \alpha & 0 & 2 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 1 \\ \beta \\ \beta - \alpha \end{bmatrix}$

   (Exercício do 1º teste de 12 de novembro de 2022)

   (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 2 \\ 1 & 1 & \alpha+2 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} \beta \\ 2\alpha \\ 0 \end{bmatrix}$.

   a) Se $\alpha \neq -2, 1$ o sistema é PD $\forall \beta \in \mathbb{R}$. Se $\alpha = -2$ o sistema é PI $\forall \beta \in \mathbb{R}$. Se $\alpha = 1$ e $\beta = 0$ o sistema é PI. Se $\alpha = 1$ e $\beta \neq 0$ o sistema é IMP. **b)** Se $\alpha \neq -1, 1$ é PD. Se $\alpha = -1$ é IMP. Se $\alpha = 1$ é PI.

   b) Se $\alpha \neq -1, 1$ o sistema é PD $\forall \beta \in \mathbb{R}$. Se $\alpha = -1$ e $\beta = 0$ o sistema é PI. Se $\alpha = -1$ e $\beta \neq 0$ o sistema é IMP. Se $\alpha = 1$ e $\beta = 4$ o sistema é PI. Se $\alpha = 1$ e $\beta \neq 4$ o sistema é IMP.

EXERCÍCIO 7. Considere os sistemas lineares com matrizes ampliadas

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & b_1 \\ 0 & 1 & a & b_2 \\ -1 & 1 & 2a & b_3 \end{array}\right], \text{ com } a, b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}.$$

a) Para que valores de a os sistemas são possíveis, independentemente dos valores dos parâmetros b_1, b_2, b_3?

b) Para que valores de b_1, b_2, b_3 os sistemas são possíveis, independentemente do valor do parâmetro a?

c) Atribua a a, b_1, b_2, b_3 valores que tornem o sistema

   c1) impossível,

   c2) indeterminado.

a) $a \neq 1$, **b)** Se $b_1 - b_2 + b_3 = 0$, **c1)** $a = 1$ e b_1, b_2, b_3 tal que $b_1 - b_2 + b_3 \neq 0$. Por exemplo, $b = (0,0,1)$, **c2)** Se $a = 1$ e $b_3 + b_1 - b_2 = 0$. Por exemplo, $b = (1,2,1)$

EXERCÍCIOS 8.

1. Seja E uma matriz em escada do tipo $m \times n$.

   a) Quantos *pivots* podem existir em E?

   b) Qual é a relação entre o número de *pivots* e o número de linhas nulas de E?

a) Podem existir <u>no máximo</u> o menor dos 2 números m e n, **b)** número de linhas nulas de E é igual $m-$ número de pivots de E

2. Seja S um sistema de equações lineares do tipo $m \times n$. Diga, justificando, se cada uma das seguintes afirmações é verdadeira ou falsa.

   a) Se $m < n$, então S é indeterminado.

   b) Se S é possível e $m < n$, então é indeterminado com exatamente $n-m$ variáveis livres.

   c) Se $m > n$, então S é impossível.

   d) Se S é possível e $m > n$, então S é determinado.

   d) Se S é possível e $m \geq n$, então S é determinado.

   e) Se S é possível e determinado então $m = n$ e a matriz reduzida obtida por aplicação do método de Gauss à matriz dos coeficientes de S é a matriz identidade.

   São todas falsas com a excepção da última (para cada das alíneas falsas apresente um *contra-exemplo*, ou seja, um exemplo de um sistema S em que a afirmação não seja verificada)

EXERCÍCIO 9. Verifique que $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & -6 \end{bmatrix}$.

EXERCÍCIOS 10.

1. Determine, caso exista, a inversa de cada uma das seguintes matrizes.

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix}, \text{ singular, } \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -6 & 5 & -8 \\ 4 & -3 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 \\ 1 & \frac{1}{4} & 2 \end{bmatrix}.$$

2. Indique os valores do parâmetro λ para os quais a matriz $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & 3 \\ 1 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$ é invertível.

   $\lambda \neq \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

3. Mostre que a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ é não singular e utilize A^{-1} para resolver o sistema $Ax = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

   $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & 2 & -\frac{3}{2} \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ e $x = A^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 3 \end{bmatrix}$

4. Sejam A, B e C matrizes invertíveis da mesma ordem.

   a) É correto afirmar que $A+B$ é invertível?
   b) Será que a matriz A^3BC^{-1} é invertível?
   c) Prove que se $AB = AC$ então $B = C$.

5. Seja A uma matriz quadrada tal que $A^2 = I - A$.

   (a) A matriz A será invertível? Se sim, qual a sua inversa?
   É invertível com inversa $A + I$
   (b) Prove que $A^3 - 2A + I = 0$.

6. Sejam A uma matriz quadrada de ordem 3 invertível e $b, c \in \mathbb{R}^3$.

   a) Classifique os sistemas $Ax = b$ e $A^{-1}x = c$.
   b) Prove que os sistemas $Ax = b$ e $A^{-1}x = c$ são equivalentes sse $b = A^2c$.
   c) Sejam u, v e w as soluções dos sistemas

   $$Ax = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, Ax = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } Ax = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \text{ respetivamente.}$$

   Determine a inversa de A em função dos vetores u, v e w.
   a) ambos PD com solução $A^{-1}b$ e Ac, respetivamente, **c)** $A^{-1} = \left[\frac{1}{3}u \mid v \mid \frac{1}{2}w\right]$

7. Sejam A, B, C e X matrizes que satisfazem a equação matricial

   $$\left[(AX)^T + BC\right]^{-1} = I,$$

   em que $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $C = [\,2 \;\; 3\,]$.

(a) Qual o tipo da matriz X?

(b) Determine X.

a) 2×2; **b)** $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$

8. Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes.

i) A é invertível.

ii) $Ax=0 \Leftrightarrow x=0$.

iii) O sistema $Ax=b$ é possível para todo o vetor b de $\mathbb{R}^n$.

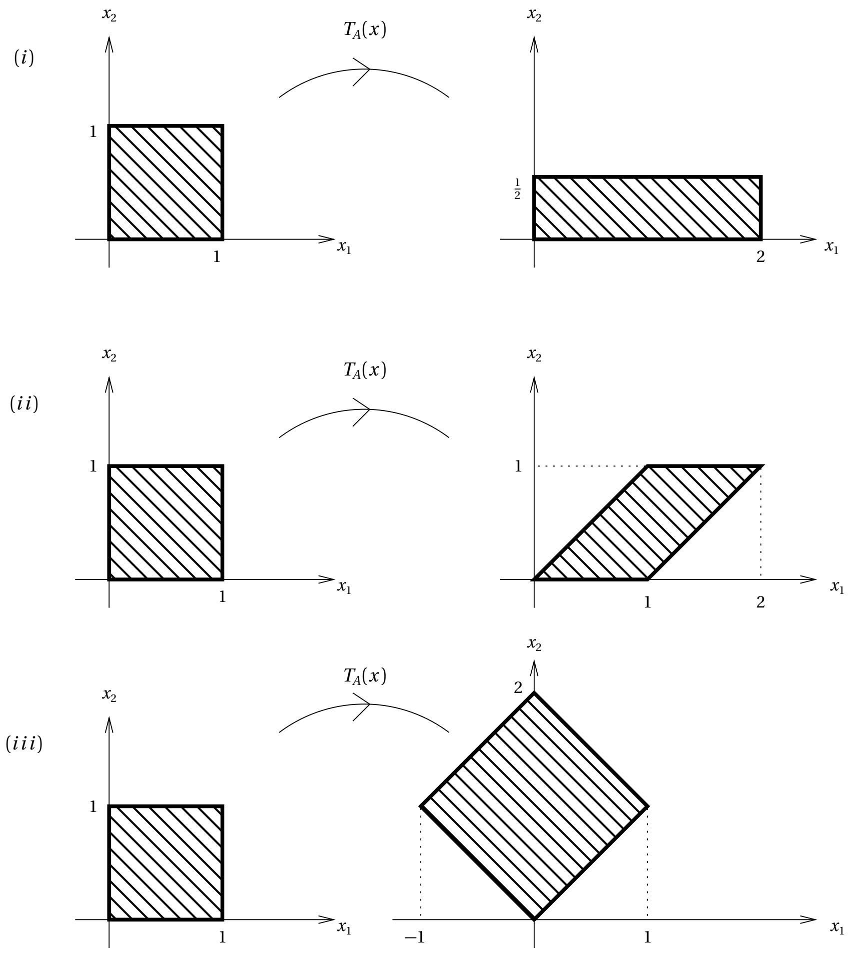
EXERCÍCIOS 11.

1. Considere a transformação linear $T_A(x) = Ax$, em que $A_{2\times 2}$ e $x \in \mathbb{R}^2$.

   Indique matrizes $A_{2\times 2}$ de modo a que:

   (a) T_A defina a reflexão no plano relativamente ao primeiro eixo coordenado. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

   (b) A acção de T_A no quadrado unitário definido pelos vetores $(1,0)$ e $(0,1)$ corresponda a cada uma das 3 situações ilustradas a seguir:



   Relativamente ao 3º caso, escreva a transformação que obteve como composição de duas transformações geométricas não triviais.

i) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ **ii)** $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ **iii)** $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ tendo-se neste caso a composição $T_A = H_{\sqrt{2}} \circ R$ (usando as notações dos slides 70 e 71).

2. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Interprete e comente a acção da transformação geométrica do plano definida por A no quadrado unitário (ver exercício anterior) e no paralelogramo definido pelos vetores $(1,0)$ e $(1,1)$.

3. Interprete o produto de matrizes AB usando uma transformação geométrica do plano, onde

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Corresponde à reflexão do triângulo de vértices $(0,0)$, $(1,1)$ e $(1,-1)$ em relação ao eixo dos yy.

4. Defina as rotações no espaço de θ radianos em torno do primeiro e do segundo eixos coordenados (no sentido direto).

$$R_{x,\theta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad R_{y,\theta} = \begin{bmatrix} -\sin\theta & 0 & \cos\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos\theta & 0 & \sin\theta \end{bmatrix}.$$

5. Indique as matrizes das seguintes transformações lineares.

   (a) $T(x,y,z) = (2x+y, -y, x+y+z)$.
   $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

   (b) $T(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4$.
   $A = [1 \ \ 2 \ \ 3 \ \ 4]$.

   (c) $T(x_1,x_2) = (x_1, x_2, x_1+x_2)$.
   $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

6. Averigue quais das seguintes transformações lineares são invertíveis, indicando a respetiva inversa caso exista.

   (a) Rotação no plano no sentido anti-horário de θ radianos.
   Sim, $R_\theta^{-1} = R_{-\theta}$.

   (b) Projecção no espaço sobre o plano xOy.
   Não, pois a projeção é definida pela matriz não invertível, $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(c) $T(x,y,z)=(x+y,y+z,x+z)$.

Sim, $T^{-1}(x,y,z)=T_{A^{-1}}(x,y,z)=A^{-1}\begin{bmatrix} x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x\\ y\\ z\end{bmatrix}=$ $\frac{1}{2}(x-y+z,x+y-z,-x+y+z)$, onde A é a matriz da tranformação T.

Exercícios variados

EXERCÍCIOS 12.

1. Calcule $A^2+3bb^\top$, com $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1\\ -1 & 2 & 5\\ -1 & 0 & 0\end{bmatrix}$ e $b=\begin{bmatrix} 2\\ -1\\ 1\end{bmatrix}$.

$$\begin{bmatrix} 12 & -6 & 7\\ -14 & 7 & 6\\ 5 & -3 & 2\end{bmatrix}$$

2. Indique o conjunto de soluções dos sistemas lineares

(a) $\begin{cases} x+y+z=1\\ 2x+y+z=1\\ 3x+y+z=1\end{cases}$

(b) $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3-x_4=8\\ 3x_1-6x_2+2x_3=18\\ x_3-2x_4=5\end{cases}$

a) $CS=\{(x,y,z): x=0, y=1-z, z\in\mathbb{R}\}$;
b) $CS=\{(x_1,x_2,x_3,x_4): x_1=4+2x_2, x_3=3, x_4=-1, x_2\in\mathbb{R}\}$

3. Discuta os sistemas $Ax=b$ para $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, com

(a) $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 3 & 1 & \alpha\end{bmatrix}$ e $b=\begin{bmatrix} 2\\ 2\\ 4\end{bmatrix}$.

(b) $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 2 & -1 & 0\\ \alpha & 2 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$ e $b=\begin{bmatrix} 1\\ 0\\ 1\\ 2\\ \beta\end{bmatrix}$.

(c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 10 & \alpha \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \beta \end{bmatrix}$.

(d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & \alpha & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 0 \\ \beta \\ 1 \end{bmatrix}$.

(e) $A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

a) Se $\alpha \neq 2$ é PD. Se $\alpha = 2$ é IMP **b)** Se $\beta \neq 1$ é IMP $\forall \alpha$. Se $\beta = 1$ e $\alpha \neq -5$ é PD. Se $\beta = 1$ e $\alpha = -5$ é IMP. **c)** Se $\alpha \neq 14$ é PD $\forall \beta$. Se $\alpha = 14$ e $\beta \neq 6$ é IMP. Se $\alpha = 14$ e $\beta = 6$ é PI. **d)** Se $\alpha \neq 3$ é PD $\forall \beta$. Se $\alpha = 3$ e $\beta \neq 1$ é IMP. Se $\alpha = 3$ e $\beta = 1$ é PI. **e)** Se $\alpha \neq -1, 1$ é PD. Se $\alpha = -1$ é IMP. Se $\alpha = 1$ é PI.

4. Discuta o sistema $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & b \\ a & b & b-a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1+3a \end{bmatrix}$, com $a, b \in \mathbb{R}$.

   Se $b = 0$ ou $a = b$ é IMP. Se $b \neq 0$ e $a \neq b$ é PD.

5. Determine $a, b, c \in \mathbb{R}$ de modo a que o sistema

$$\begin{cases} x + ay + cz = 3 \\ bx + cy + -3z = -5 \\ ax + 2y + bz = 2 \end{cases}$$

   admita a solução $(2, -1, 2)$.

   $a = b = c = 1$

6. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

   Determine e interprete geometricamente o conjunto de soluções do sistema $Ax = 0$.

   $CS = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 = -x_3, x_2 = x_3, x_3 \in \mathbb{R}\}$ que define uma reta que passa na origem com vetor diretor $(-1, 1, 1)$

7. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

a) Determine o conjunto dos vetores $b \in \mathbb{R}^4$ para os quais $Ax = b$ é possível.

b) Qual é a característica de A?

c) Dê exemplo de um vetor c para o qual o sistema $Ax = c$ seja impossível.

a) $\{(b_1, b_2, b_3, b_4) : b_1 = b_3 + b_4, b_2 = 2b_3 + b_4, b_3 \in \mathbb{R}, b_4 \in \mathbb{R}\}$; **b)** 2; **c)** $(1, 0, 0, 0)$

8. Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e o sistema $(A - \lambda I)x = \vec{0}$, com $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

a) Indique a característica de $A - \lambda I$ em função de λ. Para que valores de λ o sistema é indeterminado?

b) Mostre que se $v \in \mathbb{R}^3$ é solução do sistema, então $Av = \lambda v$.

c) Resolva o sistema considerando $\lambda = -1$. Interprete geometricamente o conjunto das soluções.

a) $\text{car}(A) = 2$ se $\lambda = -1$ ou $\lambda = 2$ e $\text{car}(A) = 3$ para $\lambda \neq -1, 2$. O sistema é indeterminado para $\lambda = -1$ ou $\lambda = 2$. **c)** $CS = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 = -x_3, x_2 = -x_3, x_3 \in \mathbb{R}\}$ que representa a reta que passa na origem e tem vetor diretor $(-1, -1, 1)$

9. Considere $A = \begin{bmatrix} \alpha & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -\alpha \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 + \beta \end{bmatrix}$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

a) Discuta o sistema $Ax = b$ para todos os valores de α e a β.

b) Resolva o sistema $Ax = b$, considerando $\alpha = 0$ e $\beta = -3$.

c) Indique, justificando, um valor de α para o qual a matriz A é invertível.

10. Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 3\alpha \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 6\beta \end{bmatrix}$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(a) Discuta o sistema $Ax = b$ em função dos parâmetros $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(b) Indique os valores de α, β para os quais A é invertível.

(c) Considere $\alpha = 0$ e inverta a matriz A.

a) Se $\alpha \neq 1$ é PD $\forall \beta$. Se $\alpha = 1$ e $\beta = 0$ é PI. Se $\alpha = 1$ e $\beta \neq 0$ é IMP; **b)** $\alpha \neq 1$; **c)** $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

11. Sejam A, B, C e D matrizes quadradas invertíveis de ordem n. Resolva, caso seja possível, as seguintes equações matriciais (em ordem a X):

   (a) $(C+X)A = D$.

   (b) $B(CA+3X) = DX$.

   (c) $ABX = I$.

   (d) $3X + AX = I$.

   (e) $(AB)^{-1}BAX = I$.

   (f) $(X-A)^2 = B+(X-A)X$.

   (g) $ABX(AB)^{-1} = I$.

   (h) $BX + XA = I$.

   a) $X = DA^{-1} - C$; **b)** Não é possível; **c)** $X = B^{-1}A^{-1}$; **d)** Não é possível; **e)** $X = A^{-1}B^{-1}AB)$; **f)** $X = A - BA^{-1}$; **g)** $X = I$; **h)** Não é possível

12. Determine matrizes X e Y tais que $3X - 2Y = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ e $-X + Y = 2I$.

   $X = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ e $Y = \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$

13. Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 10 & 12 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

   (a) Determine a inversa de A (caso exista).

   (b) Resolva a equação matricial $AX = B$.

   a) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -2 & -6 & 1 \\ -4 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix}$; **b)** $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -15 & -6 \\ -5 & 0 \\ 9 & 2 \end{bmatrix}$

14. Seja A uma matriz quadrada tal que $A^3 = 0$.
   Mostre que $I - A$ é invertível com inversa $I + A + A^2$.

15. Escreva uma equação vetorial equivalente a

   (a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}$.

   (b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$.

a) $x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}$; **b)** $x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$.

16. Interprete a transformação geométrica do plano, dita transformação *afim*,

$$T(x,y) = (x+a, y+b), \qquad a, b \in \mathbb{R},$$

e indique os valores de a e b para os quais a transformação é também linear.

Trata-se de uma translação no plano definida pelo vetor (a,b). Uma vez que $T(0,0) = (a,b)$, a transformação afim não é linear se $(a,b) \neq (0,0)$ (ver o slide 75). Quando $(a,b) = (0,0)$ a transformação afim é linear pois reduz-se à identidade de $\mathbb{R}^2$ definida pela matriz I_2.

17. Interprete a transformação geométrica do espaço definida pela matriz $A = \text{diag}(a,b,c)$, com $a,b,c \in \mathbb{R}$.

Acrescentar no enunciado da pergunta $a,b,c \neq 0$.

Podemos considerar T_A como a composição das transformações $T_{x,a}$, $T_{y,b}$ e $T_{z,c}$, cujas matrizes são, respetivamente, $\text{diag}(a,1,1)$, $\text{diag}(1,b,1)$ e $\text{diag}(1,1,c)$. Cada uma destas transformações efetua uma dilatação/contração/"fica invariante" segundo o eixo indicado, consoante o valor absoluto do respectivo parâmetro seja > 1, < 1 ou $= 1$.
No caso dos parâmetros negativos é necessário compor ainda com a reflexão relativamente ao plano coordenado definido pelas outras 2 variáveis. Por exemplo, se $c < -1$ a transformação efetua uma dilatação de razão $|c|$ segundo o eixo dos zz seguida de uma reflexão relativamente ao plano XOY. **UFF!**

Capítulo 2

Espaços vetoriais

EXERCÍCIOS 13.

1. Determine e interprete geometricamente os espaços nulos das seguintes matrizes.

a) $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -6 & -8 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 5 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

g) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 4 & -6 & 2 \end{bmatrix}$ h) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & -6 & 6 \end{bmatrix}$ i) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 9 & -3 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$.

a) $\mathcal{N}(A) = \{(x_1, x_2) : x_1 = -\frac{4}{3}x_2,\ x_2 \in \mathbb{R}\}$ - reta de $\mathbb{R}^2$ que passa na origem com vetor diretor $(-4, 3)$

b) $\mathcal{N}(A) = \{(0,0)\}$ - subespaço minimal

c) $\mathcal{N}(A) = \mathbb{R}^2$ - subespaço maximal

d) $\mathcal{N}(A) = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 = -x_3,\ x_2 = 2x_3,\ x_3 \in \mathbb{R}\}$ - reta de $\mathbb{R}^3$ que passa na origem com vetor diretor $(-1, 2, 1)$

e) $\mathcal{N}(A) = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 = -\frac{2}{5}x_3,\ x_2 = \frac{1}{5}x_3,\ x_3 \in \mathbb{R}\}$ reta de $\mathbb{R}^3$ que passa na origem com vetor diretor $(-2, 1, 5)$

f) $\mathcal{N}(A) = \{(0,0,0)\}$ - subespaço minimal

g) $\mathcal{N}(A) = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 = 4x_3,\ x_2 = 3x_3,\ x_3 \in \mathbb{R}\}$ - reta de $\mathbb{R}^3$ que passa na origem com vetor diretor $(4, 3, 1)$

h) $\mathcal{N}(A) = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 = 2x_2 - 2x_3,\ x_2 \in \mathbb{R},\ x_3 \in \mathbb{R}\}$ - plano de $\mathbb{R}^3$ que passa na origem com vetores diretores $(2, 1, 0)$ e $(-2, 0, 1)$.

i) $\mathcal{N}(A) = \{(x_1, x_2) : x_1 = \frac{1}{3}x_2,\ x_2 \in \mathbb{R}\}$ - reta de $\mathbb{R}^2$ que passa na origem com vetor diretor $(3, 1)$

2. Escreva $(-3,12,12)$ como combinação linear dos vetores $v_1=(-1,3,1)$, $v_2=(0,2,4)$ e $v_3=(1,0,2)$.

   $(-3,12,12)=2v_1+3v_2-v_3$

3. Em cada uma das alíneas seguintes, verifique se o vetor u é combinação linear dos vetores de V.

   a) $u=(3,-5)$, $\quad V=\{(1,2),(-2,6)\}$;
   É C.L.

   b) $u=(1,1,1)$, $\quad V=\{(1,0,1),(0,3,5)\}$;
   Não é C.L.

   c) $u=(2,-2,\frac{1}{6},\frac{1}{6})$, $\quad V=\{(1,-1,0,0),(2,0,1,1),(0,3,1,1)\}$;
   É C.L.

   d) $u=(0,1,0,1,0)$, $\quad V=\{(1,2,2,1,1),(\frac{2}{3},1,\frac{4}{3},1,\frac{2}{3})\}$.
   Não é C.L.

4. Averigue se $(0,1,4)\in\langle(1,3,-5),(2,9,4)\rangle$ e interprete geometricamente a situação.

   $(0,1,4)\notin\langle(1,3,-5),(2,9,4)\rangle$. De facto, este subespaço gerado define um plano que passa na origem de equação $19x-\frac{14}{3}y+14z=0$ (verifique) e $(0,1,4)$ não satisfaz esta equação.

5. Justifique que $(3,1)$ está no espaço das colunas da matriz $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 4 & 3 & 9 \end{bmatrix}$ e escreva-o como combinação linear das colunas dessa matriz.

   $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}=(1-\frac{12}{5}\alpha_3)\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}+(-1+\frac{1}{5}\alpha_3)\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}+\alpha_3\begin{bmatrix} 5 \\ 9 \end{bmatrix}$, com $\alpha_3\in\mathbb{R}$.

6. Determine e interprete geometricamente os espaços de colunas das matrizes consideradas na alínea 1.

   a) $\mathscr{C}(A)=\{(b_1,b_2): b_2=-2b_1,\ b_1\in\mathbb{R}\}$
   b) $\mathscr{C}(A)=\mathbb{R}^2$
   c) $\mathscr{C}(A)=\{(0,0)\}$
   d) $\mathscr{C}(A)=\{(b_1,b_2,b_3): b_3=b_2+b_1,\ b_1\in\mathbb{R},\ b_2\in\mathbb{R}\}$
   e) $\mathscr{C}(A)=\{(b_1,b_2,b_3): b_3=b_2+2b_1,\ b_1\in\mathbb{R},\ b_2\in\mathbb{R}\}$
   f) $\mathscr{C}(A)=\mathbb{R}^3$
   g) $\mathscr{C}(A)=\mathbb{R}^2$
   h) $\mathscr{C}(A)=\{(b_1,b_2): b_2=3b_1,\ b_1\in\mathbb{R}\}$
   i) $\mathscr{C}(A)=\{(b_1,b_2,b_3): b_2=3b_1,\ b_3=2b_1,\ b_1\in\mathbb{R}\}$

EXERCÍCIOS 14.

1. Decida sobre a independência linear dos seguintes conjuntos de vetores.

   a) $\{(3,1),(4,-2)\}$
   l.i.

   b) $\{(3,1),(4,-2),(7,2)\}$
   l.d.

   c) $\{(-1,2,0,2),(5,0,1,1),(8,-6,1,-5)\}$
   l.d.

   d) $\{(-1,2,0,2),(5,0,1,1),(8,-6,1,-5),(0,0,0,1)\}$
   l.d.

   e) $\{(0,-3,1),(2,4,1),(-2,8,5)\}$.
   l.i.

2. Decida sobre a independência linear dos conjuntos de vetores,
   $U = \{(1,2,-1,0),(0,2,1,0),(2,-1,3,0),(1,1,1,1)\}$ e
   $U' = \{(1,2,-1,0),(2,-1,3,0),(1,1,1,1)\}$

   U l.i. e U' l.i.

3. Mostre que o conjunto de vetores $\{(1,0,3,1),(-1,1,0,1),(2,3,0,0),(1,1,6,3)\}$ é linearmente dependente. Pode cada um dos vetores ser expresso como uma combinação linear dos restantes?

   Não, pois $(2,3,0,0)$ não é C.L. dos restantes vetores.

4. Discuta, em função de $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$, a independência linear dos seguintes conjuntos de vetores.

   a) $\{(1,-2),(\alpha,-1)\}$
   l.i. $\Leftrightarrow \alpha \neq \frac{1}{2}$.

   b) $\{(\alpha,1,1),(1,\alpha,1),(1,1,\alpha)\}$
   l.i. $\Leftrightarrow \alpha \neq -2, 1$.

   c) $\{0,\gamma,-\beta),(-\gamma,0,\alpha),(\beta,-\alpha,0)\}$.
   l.d. $\forall \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$.

5. Sejam $\{v_1, v_2, v_3\}$ um conjunto linearmente independente de vetores de $\mathbb{R}^n$ e $u_1 = v_1 + v_2$, $u_2 = v_1 + v_3$ e $u_3 = v_2 + v_3$. Justifique que $\{u_1, u_2, u_3\}$ é também linearmente independente.

EXERCÍCIOS 15.

1. Indique quais dos seguintes conjuntos são bases de $\mathbb{R}^2$:

   a) $V = \{(1,-1),(3,0)\}$
   Sim.

b) $U = \{(1,1),(0,2),(2,3)\}$
Não.

c) $W = \{(1,1),(8,8)\}$.
Sim.

2. Indique quais dos seguintes conjuntos são bases de $\mathbb{R}^3$.

a) $V = \{(1,1,1),(0,2,3),(1,0,2)\}$
Sim.

b) $U = \{(1,0,1),(2,4,8)\}$
Não.

c) $W = \{(3,0,1),(1,1,1),(4,1,2)\}$.
Não.

3. Considere em $\mathbb{R}^3$ os vetores $v_1 = (\alpha,6,-1)$, $v_2 = (1,\alpha,-1)$ e $v_3 = (2,\alpha,-3)$, com $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) Determine α de modo que $\{v_1, v_2, v_3\}$ seja uma base de $\mathbb{R}^3$.
$\alpha \neq -\frac{3}{3}$ e $\alpha \neq 2$.

b) Para um dos valores de α determinados em a), determine as componentes do vetor $(-1,1,2)$ em relação à base correspondente.
Assumindo $\alpha = 0$ vem $(-1,1,2) = \frac{1}{6}v_1 + \frac{4}{3}v_2 - \frac{7}{6}v_3$.

EXERCÍCIO 16. Determine uma base para o espaço nulo de cada uma das seguintes matrizes.

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & 4 & -1 & 5 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

a) Possível base para o espaço nulo: $\{(1,-3,1,0),(2,-4,0,1)\}$.
b) Possível base para o espaço nulo: $\{(-2,1,0)\}$.
c) Possível base para o espaço nulo: $\{(1,0,0),(0,-2,-1)\}$.
d) Possível base para o espaço nulo: $\{(-2,1,0,0,0),(3,0,-2,1,0),(-7,0,4,0,1)\}$.
e) Possível base para o espaço nulo ($\mathbb{R}^2$): $\{(1,0),(0,1)\}$ (base canónica).

EXERCÍCIO 17. Considere o subconjunto de $\mathbb{R}^4$,

$$V = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) : x_1 = x_2 - 3x_3,\ x_3 = 2x_4\}.$$

a) Mostre que V é subespaço vetorial.

b) Indique uma base de V.

Uma possível base é $\{(1,1,0,0),(-6,0,2,1)\}$.

EXERCÍCIOS 18. Indique uma base para cada um dos seguintes conjuntos.

1. O plano de $\mathbb{R}^3$ definido por $2x_1+4x_2-2x_3=0$.

   Uma possível base é $\{(-2,1,0),(1,0,1)\}$.

2. O hiperplano de $\mathbb{R}^5$ definido por $3x_1-6x_2+3x_3-2x_4+9x_5=0$.

   Uma possível base é$\{(2,1,0,0,0),(-1,0,1,0,0),(\frac{2}{3},0,0,1,0),(-3,0,0,0,1)\}$.

EXERCÍCIO 19. Determine uma base para o espaço das colunas de cada uma das matrizes do exercício 16.

a) Possível base para o espaço das colunas: $\{(1,0),(0,1)\}$.
b) Possível base para o espaço das colunas: $\{(1,1),(3,5)\}$
c) Possível base para o espaço das colunas: $\{(1,2,3)\}$.
d) Possível base para o espaço das colunas: $\{(1,2,3),(1,3,4)\}$
e) Possível base para o espaço das colunas ($\{(0,0,0)\}$): $\{\}$ (por convenção).

EXERCÍCIO 20.

1. Calcule $\dim S$, com $S=<\{(1,0,1),(1,-1,0),(3,-1,2)\}>$ e $S=\{(x,y,z,t)\in \mathbb{R}^4 : x-2y+z-t=0\}$.

   2 e 3.

2. Para que valores de α a dimensão do subspaço $S=<\{(1,\alpha,-1),(-1,1,1),(\alpha,0,-1)\}>$ é 3?

   $\alpha\neq -1,1$.

EXERCÍCIO 21. Determine uma base e a dimensão dos subespaços de $\mathbb{R}^4$ gerados pelos seguintes conjuntos de vetores.

a) $\{(1,0,2,3),(7,4,-2,1),(5,2,4,1),(3,2,0,1)\}$

   Uma possível base é $\{(1,0,2,3),(7,4,-2,1),(5,2,4,1),(3,2,0,1)\}$ e a dimensão é 4.

b) $\{(1,3,2,-1),(2,0,-1,0),(1,1,1,1),(1,2,0,0),(5,6,2,0)\}$

   Uma possível base é $\{(1,3,2,-1),(2,0,-1,0),(1,1,1,1),(1,2,0,0)\}$ e a dimensão é 4.

EXERCÍCIO 22. Seja V o espaço vetorial gerado pelo conjunto de vetores de $\mathbb{R}^3$

$$\{(1,0,5),(1,1,1),(0,3,1),(-3,0,-2)\}.$$

a) Mostre que $V = \mathbb{R}^3$.

b) Determine uma base de $\mathbb{R}^3$ contida no conjunto de vetores dado.

Uma possível base é $\{(1,0,5),(1,1,1),(0,3,1)\}$.

c) Escreva o vetor $(-2,3,4)$ como combinação linear dos vetores da base obtida em b).

$(-2,3,4) = (1,0,5) - 3(1,1,1) + 2(0,3,1)$.

EXERCÍCIO 23. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [\, u_1 \,|\, u_2 \,|\, u_3 \,]$.

1. Para que valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ o vetor $(\alpha, \alpha^2, 2)$ é combinação de linear de u_1, u_2 e u_3?

   $\alpha = -2$ e $\alpha = 1$.

2. Indique uma base para $\mathbb{R}^3$ que inclua os vetores u_1 e u_3.

   Uma possível base para $\mathbb{R}^3$ é $\{(1,0,1),(0,1,1),(0,0,2)\}$.

EXERCÍCIOS 24.

1. Seja A uma matriz do tipo $m \times n$. Para cada um dos casos considerados na tabela seguinte, determine as dimensões de $\mathscr{C}(A)$, $\mathscr{N}(A)$ e $\mathscr{N}(A^T)$.

	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	(g)
$m \times n$	3×3	3×3	3×3	5×9	9×5	4×4	6×2
car(A)	3	2	1	2	2	0	2

$\dim \mathscr{C}(A)$	3	2	1	2	2	0	2
$\dim \mathscr{N}(A)$	0	1	2	7	3	4	0
$\dim \mathscr{N}(A^T)$	0	1	2	3	7	4	4

2. Seja A uma matriz quadrada de ordem 3, cujo espaço das colunas define um plano de $\mathbb{R}^3$ que passa na origem. Pode o espaço nulo de A determinar um plano que passa na origem? Justifique.

   Não. Tem que ser uma reta que passa na origem (Porquê?).

EXERCÍCIOS 25.

1. Construa uma base de $\mathbb{R}^3$ que inclua o vetor $(1,1,1)$.

   Uma possível base é $\{(1,0,0),(0,1,0),(1,1,1)\}$.

2. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 6 \end{bmatrix}$. Verifique que $v = (0,3,3,-1)$ pertence a $\mathcal{N}(A)$ e indique uma base de $\mathcal{N}(A)$ que inclua v.

   Uma possível base é $\{(-1,1,1,0),(0,3,3,-1)\}$.

3. Considere a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

   a) Resolva o sistema homogéneo $Ax = \vec{0}$ e indique a dimensão de $\mathcal{N}(A)$.
   $\mathcal{N}(A) = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 = -2x_3 - x_4,\ x_2 = x_3 - 2x_4,\ x_3 \in \mathbb{R},\ x_4 \in \mathbb{R}\}$, cuja dimensão é 2 (número de variáveis livres).

   b) Mostre que $\{(1,2,0,-1)$ e $(-1,3,1,-1)\}$ é uma base de $\mathcal{N}(A)$.

   c) Verifique que $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ é solução do sistema $Ax = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, e mostre que se u é um vetor do espaço nulo de A, entao $v + u$ é também solução do sistema.

4. Sejam $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ e $V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0,\ x_2 = x_3\}$

   (a) Descreva $\mathcal{N}(A)$ analitica e geometricamente.
   $\mathcal{N}(A) = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 = x_3,\ x_2 = -\frac{1}{2}x_3,\ x_3 \in \mathbb{R}\}$. $\mathcal{N}(A)$ define a reta de $\mathbb{R}^3$ que passa na origem e contém a direção $(1, -\frac{1}{2}, 1)$.

   (b) Indique uma base e a dimensão de V.
   $\dim(V) = 2$ e uma possível base para V é $\{(0,1,1,0),(-1,0,0,1)\}$.

   (c) Mostre que $\mathcal{C}(A) = V$.
   Uma possível forma é verificar que $\mathcal{C}(A) \subset V$ e que $\dim \mathcal{C}(A) = \dim V \ldots$

5. Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $S = \{x \in \mathbb{R}^3 : Ax = Bx\}$.

   a) Mostre que S é um espaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

b) Indique uma base de S.

Uma possível base é $\{(-\frac{1}{2},1,0),(-\frac{1}{2},0,1)\}$.

c) Determine um vetor não nulo do espaço nulo de A que pertença a S.

Por exemplo $(0,1,-1)$.

d) Mostre que se y é um vetor que pertence simultaneamente a S e ao espaço nulo de A, então y também pertence ao espaço nulo de B.

Exercícios variados

EXERCÍCIOS 26.

1. Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = [\, v_1 \,|\, v_2 \,|\, v_3 \,]$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ e $y = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}$.

   (a) Descreva, analitica e geometricamente, $\mathscr{C}(A)$.
   $\mathscr{C}(A) = \{(b_1, b_2, b_3, b_4) : b_2 = 2b_3 - 3b_1,\ b_1 \in \mathbb{R}, b_3 \in \mathbb{R}, b_4 \in \mathbb{R}\}$. Trata-se de um hiperplano de $\mathbb{R}^4$ que passa na origem.

   (b) Indique uma base e a dimensão de $\mathscr{C}(A)$.
   Uma possível base é $\{v_1, v_2, v_3\}$ e a dimensão de $\mathscr{C}(A)$ é 3.

   (c) Mostre que o vetor y pertence a $\mathscr{C}(A)$ e escreva-o como combinação linear dos vetores da base de $\mathscr{C}(A)$ indicada em b).
   $y = 0v_1 - 2v_2 + v_3$.

   (d) Indique um vetor de $\mathbb{R}^4$ que não pertença a $\mathscr{C}(A)$.
   Por exemplo $(1,0,0,0)$ (Justifique!)

   (e) Indique $\dim \mathscr{N}(A)$.
   $\dim(\mathscr{N}(A)) = 0$.

   (f) Será $\{y, v_3\}$ uma base de $\mathscr{C}(A)$? Justifique.
   Não! Todas as bases para $\mathscr{C}(A)$ possuem 3 vetores.

   (g) Classifique o sistema $Ax = \vec{0}$.
   Determinado.

2. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$.

   (a) Determine $\mathscr{N}(A)$ e interprete-o geometricamente.
   $\mathscr{N}(A) = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 = -x_2 + x_3,\ x_2 \in \mathbb{R}, x_3 \in \mathbb{R}\}$ Define o plano de $\mathbb{R}^3$ que passa na origem e contém as direções $(-1,1,0)$ e $(1,0,1)$.

   (b) Indique uma base para $\mathscr{C}(A)$.
   Uma possível base é $\{(1,-1,2)\}$.

   (c) Indique $\text{car}(A)$.
   $\text{car}(A) = \dim \mathscr{C}(A) = 1$.

   (d) Mostre que $\mathscr{N}(A) = \langle(-1,1,0),(1,0,1)\rangle$.

3. Considere $V = \langle(1,1,0),(-1,1,1),(1,3,1)\rangle$.

(a) Indique $\dim V$.

$\dim(V) = 2$.

(b) Mostre que $(2,4,1) \in V$.

(c) Indique uma matriz A tal que $\mathscr{C}(A) = V$.

Por exemplo, $A = [v_1\ v_2]$ onde $v_1 = (1,1,0)$ e $v_2 = (-1,1,1)$ (indique outra possível matriz).

4. Considere os vetores $u = (1,2,1)$ e $v = (0,3,1)$.

(a) Indique vetores w e z distintos de u e v tais que $\langle u, v\rangle = \langle w, z\rangle$.

Por exemplo, $z = u - v$ e $w = u + v$.

(b) Escreva uma matriz A quadrada de ordem 3 tal que $\mathscr{C}(A) = \langle u, v\rangle$.

(c) Determine $\mathscr{N}(A)$.

$\mathscr{N}(A) = \langle(-1,-1,1)\rangle$ para a matriz indicada em b).

5. Sejam $v_1 = (1,-1,1)$, $v_2 = (1,0,-1)$, $v_3 = (2,-1,0)$ e $v_4 = (1,1,0)$.

(a) Será $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ linearmente independente?

Não (4 vetores de $\mathbb{R}^3$ são sempre l.d.)

(b) Será que $\langle v_1, v_2, v_3, v_4\rangle = \mathbb{R}^3$?

Sim.

(c) Indique uma base para $\mathbb{R}^3$ constituída por vetores de $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.

$\{v_1, v_2, v_4\}$.

6. Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

a) Determine uma base $\mathscr{N}(\mathscr{A})$.

$\{(3,1)\}$.

b) Determine uma solução do sistema $Ax = b$.

$(1,0)$.

c) Seja x_0 a solução obtida em b). Verifique que para todo o vetor $u \in \mathscr{N}(\mathscr{A})$, $x_0 + u$ é solução de $Ax = b$.

d) Interprete geometricamente os resultados obtidos nas alíneas anteriores e conclua que não existem mais soluções para o sistema $Ax = b$.