Base para o espaço de colunas - exercício

Vamos agora ver como se podem determinar bases para o espaço de colunas de uma matriz.

Exercício na aula

Indicar uma base e a dimensão para o espaço nulo das colunas da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & -1 & -3 \end{bmatrix} = [\, v_1 \;\; v_2 \;\; v_3 \;\; v_4 \,].$$

Resolução: vamos começar por determinar $\mathcal{C}(A)$. Aplicando a fase descendente do método de Gauss a $[\, A \,|\, b \,] = [\, v_1 \; v_2 \; v_3 \; v_4 \,| b \,]$ vem,

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 4 & b_1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & b_2 \\ -1 & -2 & -1 & -3 & b_3 \end{array}\right] \to \cdots \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 4 & b_1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & b_1 + b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_1 + b_2 + 2b_3 \end{array}\right].$$

Logo para o sistema $Ax = b$ ser possível, $b_1 + b_2 + 2b_3 = 0$ e portanto

$$\mathcal{C}(A) = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle = \{ b = (b_1, b_2, b_3) \; : \; b_1 + b_2 + 2b_3 = 0 \} \,.$$

Base para o espaço de colunas - exercício (concl.)

Observação

- A sequência efetuada de operações elementares do método de Gauss apenas depende das colunas que estão associadas às colunas com pivot na matriz em escada.
- As colunas sem pivot em A' não têm influência na discussão do sistema em escada $[\, A' \,|\, b' \,]$.

De facto, aplicando a fase descendente apenas aos vetores que estão associados às colunas com pivot em A', vem (confirme),

$$[\, v_1 \;\; v_3 \,|\, b \,] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & b_1 \\ 1 & 0 & b_2 \\ -1 & -1 & b_3 \end{array}\right] \to \cdots \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & b_1 \\ 0 & 1 & b_1 + b_3 \\ 0 & 0 & b_1 + b_2 + 2b_3 \end{array}\right],$$

e portanto,

$$\langle v_1, v_3 \rangle = \{ b = (b_1, b_2, b_3) \; : \; b_1 + b_2 + 2b_3 = 0 \} = \mathcal{C}(A) = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle.$$

Logo os vetores associados às colunas sem pivot em A', v_2 e v_4, são redundantes. Como $= \langle v_1, v_3 \rangle = \mathcal{C}(A)$ e $\{v_1, v_3\}$ é l.i. (porque estão associados às colunas com pivot em A'), $\{v_1, v_3\}$ é uma base de $\mathcal{C}(A)$ (contida no conjunto inicial de geradores). Em particular, $\dim \mathcal{C}(A) =$ nº pivots em $A' = 2$.

Observações

- Mais geralmente, pode-se mostrar que dados $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^m$ e $A = [v_1\ v_2 \cdots\ v_n] \to A'$ (escada), com $\operatorname{car}(A) = k$, se tem,

$$\mathcal{C}(A) = \langle v_1, v_2, \ldots, v_n \rangle = \langle v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_k} \rangle,$$

  onde $v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_k}$ são as k colunas de A associadas às colunas com pivot em A', isto é, que as colunas de A que estão associadas às colunas sem pivot em A' **não são necessárias para gerarem** $\mathcal{C}(A)$ (são vetores redundantes).

- Por outro lado, $\{v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_k}\}$ é linearmente independente, pois é constituído por vetores que estão associados a colunas com pivot na matriz em escada A'.

- Das considerações anteriores e da definição de base do slide 114 deduz-se o algoritmo do próximo slide.

Base para o espaço das colunas/espaço gerado - algortimo

Algoritmo

`Input:` $A = [\, v_1 \quad \cdots \quad v_n \,]$ com $v_1 \ldots, v_n \in \mathbb{R}^m$.

`Objectivo:` Base para $\mathcal{C}(A) = \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$.

- Aplicar a fase descendente do método de Gauss à matriz A:
  $$A \to \cdots \to A' \text{ com } A' \text{ escada.}$$
- O subconjunto das colunas de A que correspondem às colunas com pivot em A' constitui uma base de $\mathcal{C}(A) = \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$, contida no conjunto inicial de geradores $v_1, \ldots, v_n$.

Em particular, tem-se

$$\boxed{\dim \langle v_1, \ldots, v_n \rangle = \dim \mathcal{C}(A) = \text{número de pivots em } A' = \operatorname{car}(A).}$$

Obs: a característica de uma matriz A é muitas vezes definida como $\dim \mathcal{C}(A)$.

Exercício do slide 125 revisitado

- Aplicando o algoritmo do slide anterior à matriz $A = [\, v_1 \;\; v_2 \;\; v_3 \;\; v_4 \,]$ do exercício do slide 125 (não é necessário ampliar com o vetor genérico b) vem,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & -1 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A',$$

donde se deduz que $\{v_1, v_3\} = \{(1,1,-1),(2,0,-1)\}$ é uma base de $\mathcal{C}(A) = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$, pois são as colunas de A que estão associadas às colunas com pivot em A', tendo-se $\dim \mathcal{C}(A) = \mathrm{car}(A) = 2$. Note-se que a base anterior está contida no conjunto inicial de geradores v_1, v_2, v_3, v_4.

- Alternativamente, viu-se que $\mathcal{C}(A) = \{(b_1, b_2, b_3) : b_1 + b_2 + 2\, b_3 = 0\}$ e portanto $\mathcal{C}(A)$ é o CS da equação definidora $b_1 + b_2 + 2\, b_3 = 0$.

  Logo pode-se escrever $\mathcal{C}(A) = \mathcal{N}(B)$, onde $B = [1 \;\; 1 \;\; 2]$ é matriz do sistema homogéneo cuja a única equação é $b_1 + b_2 + 2\, b_3 = 0$.

  Aplicando o algoritmo da base para o espaço nulo do slide 123 à matriz B deduz-se a nova base de $\mathcal{C}(A)$, $\{(-1,1,0),(-2,0,1)\}$ (verifique), que já não está contida no conjunto inicial de geradores v_1, v_2, v_3, v_4.

Relação entre as dimensões de $\mathcal{N}(A)$ e de $\mathcal{C}(A)$

- Seja A matriz do tipo $m \times n$ e A' matriz em escada obtida a partir de A. Pelos resultados do slides 123 e 128 tem-se:
  - $\dim \mathcal{N}(A) = n - \mathrm{car}(A)$ (nº de colunas sem pivot em A').
  - $\dim \mathcal{C}(A) = \mathrm{car}(A)$ (nº de colunas com pivot em A').

- Daqui resulta imediatamente a seguinte resultado que estabelece uma relação importante entre as dimensões dos dois subespaços fundamentais associados à matriz A.

Teorema

Se A é uma matriz do tipo $m \times n$ tem-se

$$\boxed{\dim \mathcal{N}(A) + \dim \mathcal{C}(A) = \text{número de colunas de } A = n.}$$

Subespaço vetorial e dimensão

- O conhecimento da dimensão de um subespaço vetorial permite conhecer o tipo de conjunto que esse subespaço vetorial define
- Para os subespaços vetoriais do plano ($\mathbb{R}^2$) e do espaço ($\mathbb{R}^3$), tem-se

	subespaços vetoriais	dimensão
$\mathbb{R}^2$	$\{\vec{0}\}$	0
	retas que passam na origem	1
	$\mathbb{R}^2$	2
$\mathbb{R}^3$	$\{\vec{0}\}$	0
	retas que passam na origem	1
	planos que passam na origem	2
	$\mathbb{R}^3$	3

Têm-se ainda as seguintes caracterizações dos subespaços minimal e maximal de $\mathbb{R}^m$ com m arbitrário, em função das suas dimensões:

- $V = \{\vec{0}\} \;\Leftrightarrow\; \dim V = 0$.
- $V = \mathbb{R}^m \;\Leftrightarrow\; \dim V = m$.

Vetor pertence ao espaço nulo / espaço das colunas de uma matriz

Recordatória

Sejam $A_{m\times n}$, $u \in \mathbb{R}^n$ e $b \in \mathbb{R}^m$. Então:

- $u \in \mathcal{N}(A) \quad\Leftrightarrow\quad Au = \vec{0}$.
- $b \in \mathcal{C}(A) \quad\Leftrightarrow\quad [\,A\,|\,b\,]$ é possível.

Exemplo

Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}_{3\times 4}$.

- Vejamos que $u = (-2, 1, 0, 1) \in \mathcal{N}(A)$. De facto,

$$Au = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \vec{0}.$$

- Vejamos que $b = (1, -1, 5) \in \mathcal{C}(A)$. De facto,

$$[A|b] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 5 \end{array}\right] \rightarrow \cdots \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = [A'|b']$$

é possível.

Critério para definir base de um subespaço vetorial

- Vimos anteriormente que as bases de $\mathbb{R}^m$ (cuja dimensão é m) são os conjuntos linearmente independentes formados por m vetores de $\mathbb{R}^m$ (conjuntos l.i. de vetores de $\mathbb{R}^m$ de cardinalidade **máxima**)
- Temos uma caracterização análoga para qualquer subespaço vetorial V cuja dimensão se conhece!

Teorema

As bases de um subespaço vetorial $V \neq \{\vec{0}\}$ de dimensão k são os conjuntos linearmente independentes formados por k vetores de V.

As bases de V são os conjuntos l.i. de vetores de V de cardinalidade **máxima**.
Nos exercícios podemos aplicar o resultado com a seguinte formulação.

Teorema (Critério para definir base de V)

Sejam $V \neq \{\vec{0}\}$ subespaço vetorial de $\mathbb{R}^m$ e $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^m$. Tem-se que $\{v_1, \ldots, v_k\}$ é **base de** V se e só se verificar as seguintes 3 condições:

- $v_1, \ldots, v_k \in V$.
- $\{v_1, \ldots, v_k\}$ é linearmente independente.
- $\dim V = k$ (nº de vetores do conjunto).

Critério para definir base de um subespaço vetorial - exercício

Exercício na aula

Considere $v_1 = (-2, 1, 0, 1)$, $v_2 = (-1, 0, -1, 1)$ e a matriz do exemplo do slide 132,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}_{3\times 4}.$$

Mostre que $\{v_1, v_2\}$ é base de $\mathcal{N}(A)$.

Pelo critério do slide 133 basta verificar as seguintes condições:

- $v_1, v_2 \in \mathcal{N}(A)$. De facto, tem-se $Av_1 = \vec{0}$ e $Av_2 = \vec{0}$ (confirme).
- $\{v_1, v_2\}$ é linearmente independente. De facto, v_1 e v_2 são não colineares.
- $\dim \mathcal{N}(A) = 2$ (nº de vetores do conjunto). De facto, a matriz em escada A' obtida a partir de A tem 2 colunas sem pivot (confirme).

Logo $\{v_1, v_2\}$ é base de $\mathcal{N}(A)$.

Componentes de um vetor numa base de um subespaço

Teorema (Representação única na base de um subespaço)

Seja V um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^m$ e $\mathfrak{B} = \{v_1, \ldots, v_k\}$ uma base de V. Para todo o $b \in V$ existem escalares únicos, $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ tais que

$$b = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k. \qquad (2)$$

Os escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ designam-se por componentes de b na base $\mathfrak{B}$.

Observação

O vetor $u = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ das componentes de b que verificam a relação (2) relativamente à base $\mathfrak{B}$ de V (assumindo esta base ordenada), é a solução única do sistema **PD** $Ax = b$, com $A = [\, v_1 \;\; v_2 \;\; \cdots \;\; v_k \,]$, isto é, verifica $Au = b$, e pode ser obtido reduzindo a matriz $[\, v_1 \;\; v_2 \;\; \cdots \;\; v_k \,|\, b \,]$.

De facto, por definição de base (slide 114) e pelo critério do slide 108,
ii) $b \in V = \langle v_1, \ldots, v_k \rangle = \mathcal{C}(A)$ e portanto o sistema $Ax = b$ é **possível**;
i) $\{v_1, \ldots, v_k\}$ é l.i. logo $\text{car}(A) = k$ e portanto $Ax = b$ é **determinado**.

Componentes de um vetor numa base de um subespaço - exemplos

Exemplos

- O vetor das componentes de $b = (1, 4, 2)$ relativamente à base canónica de $\mathbb{R}^3$, $\{e_1, e_2, e_3\}$, é o próprio vetor $(1, 4, 2)$ pois,

$$(1, 4, 2) = 1\,(1, 0, 0) + 4\,(0, 1, 0) + 2\,(0, 0, 1) = 1\, e_1 + 4\, e_2 + 2\, e_3.$$

- O vetor das componentes de $b = (1, 4, 2)$ relativamente à base de $\mathbb{R}^3$, $\{v_1, v_2, v_3\} = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$, é $(-3, 2, 2)$ pois,

$$(1, 4, 2) = -3\,(1, 0, 0) + 2\,(1, 1, 0) + 2\,(1, 1, 1) = -3\, v_1 + 2\, v_2 + 2\, v_3.$$

  O vetor $(-3, 2, 2)$ corresponde à solução (única) de $Ax = b$ com $A = [\, v_1 \;\; v_2 \;\; v_3 \,]$, e é calculado reduzindo a matriz $[\, v_1 \;\; v_2 \;\; v_3 \,|\, b \,]$.

TPC: determine as componentes do vetor genérico $b = (b_1, b_2, b_3)$ na base canónica (ver o slide 115) e na base $\{v_1, v_2, v_3\}$ anterior.