# Capítulo 3

# Ortogonalidade e Projeção Ortogonal

EXERCÍCIOS 27.

1. Calcule as normas dos seguintes vectores.

   (a) $(1,-1,2)$

   (b) $(-1,0,\pi,0)$

   (c) $(5,0,1,0,1,3)$

   **a)** $\sqrt{6}$, **b)** $\sqrt{1+\pi^2}$, **c)** 6

2. Calcule as distâncias entre os seguintes pares de vectores.

   (a) $(1,-1,2)$ e $(0,-1,0)$.

   (b) $(-1,0,2,0)$ e $(1,0,0,1)$.

   (c) $(5,0,1,0,1,3)$ e $(-1,2,0,1,1,0)$.

   **a)** $\sqrt{5}$ , **b)** 3, **c)** $\sqrt{51}$

3. Considere $v_1 = (1,0,1)$ e $v_2 = (1,1,-1)$.

   (a) Determine os vectores de $\mathbb{R}^3$ que são simultaneamente ortogonais a $v_1$ e $v_2$.

   (b) Indique um vetor unitário de $\mathbb{R}^3$ simultaneamente ortogonal a $v_1$ e $v_2$.

   **a)** $\{(-x_3, 2x_3, x_3) : x_3 \in \mathbb{R}\} = \langle(-1,2,1)\rangle$ **b)** $\text{vers}(-1,2,1) = \left(\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$, ou, em alternativa, $-\text{vers}(-1,2,1)) = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}\right)$.

EXERCÍCIOS 28.

1. Justifique que $(2,1,1,-1)$ é ortogonal ao espaço gerado pelos vetores,

$$(1,0,0,2),\ (-1,0,2,0),\ (-1,2,0,0),\ (1,1,1,4).$$

2. Verifique que $(4,2,-1)$ é ortogonal ao espaço das colunas da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

EXERCÍCIOS 29.

1. Determine os complementos ortogonais do espaço das colunas de cada uma das seguintes matrizes (no caso das alíneas a), b) e c) interprete ainda geometricamente o resultado obtido).

(a) $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

**(a)** $\{(x_1,x_2): x_1 = 2\,x_2,\ x_2 \in \mathbb{R}\} = \langle(2,1)\rangle$ que define a reta de $\mathbb{R}^2$ que passa na origem com vetor diretor $(2,1)$ e é perpendicular à reta que passa na origem com vetor diretor $(1,-2)$, definida pelo espaço de colunas da matriz.
**(b)** $\{(x_1,x_2,x_3): x_1 = -2\,x_3,\ x_2 = -\frac{3}{2}\,x_3,\ x_3 \in \mathbb{R}\} = \langle(-4,-3,2)\rangle$ que define a reta de $\mathbb{R}^3$ que passa na origem com vetor diretor $(-4,-3,2)$ e é perpendicular ao plano que passa na origem com vetores diretores $(1,0,2)$ e $(-1,2,1)$, definido pelo espaço de colunas da matriz.
**(c)** $(\mathbb{R}^3)^\perp = \{\vec{0}\}$ (o complemento ortogonal do subespaço maximal de $\mathbb{R}^3$ é o subespaço minimal de $\mathbb{R}^3$).
**(d)** $\{(x_1,x_2,x_3,x_4): x_1 = -2\,x_2 - 3\,x_3 - 4\,x_4,\ x_2 \in \mathbb{R},\ x_3 \in \mathbb{R},\ x_4 \in \mathbb{R}\} = \langle(-2,1,0,0),(-3,0,1,0),(-4,0,0,1)\rangle$ que define o hiperplano de $\mathbb{R}^4$.
**(e)** $\{(x_1,x_2,x_3,x_4): x_1 = -3\,x_3 + 3\,x_4,\ x_2 = -2\,x_3 + 2\,x_4,\ x_3 \in \mathbb{R},\ x_4 \in \mathbb{R}\} = \langle(-3,-2,1,0),(3,2,0,1)\rangle$.

2. Determine os complementos ortogonais dos subespaços gerados por $\{(1,2,2,1), (1,0,2,0)\}$ e por $\{(1,1,2,-1)\}$.

$\langle(1,2,2,1),(1,0,2,0)\rangle^\perp = \langle(-2,0,1,0),(0,-1,0,2)\rangle$
$\langle(1,1,2,-1)\rangle^\perp = \langle(-1,1,0,0),(-2,0,1,0),(1,0,0,1)\rangle$.

3. Calcule a dimensão e indique uma base do complemento ortogonal para cada um dos seguintes subespaços.

   (a) $<\{(1,1)\}>$.

   (b) $<\{(1,1,3),(1,1,2)\}>$.

   (c) $<\{(1,1,0,0),(0,2,4,5)\}>$.

   (d) $<\{(2,2,1,0),(2,4,0,1),(4,-2,1,-1)\}>$.

   **(a)** A dimensão é 1 e uma possível base é $\{(-1,1)\}$.
   **(b)** A dimensão é 1 e uma possível base é $\{(-1,1,0)\}$.
   **(c)** A dimensão é 2 e uma possível base é $\{(2,-2,1,0),(5,-5,0,2)\}$.
   **(d)** A dimensão é 1 e uma possível base é $\{(0,-1,2,4)\}$.

4. Indique uma base de $\mathbb{R}^3$ que inclua vetores do subespaço gerado por $\{(1,1,3),(1,1,2)\}$ e do seu complemento ortogonal.

   Uma possível base é $\{(1,1,3),(1,1,2),(-1,1,0)\}$.

EXERCÍCIO 30. Considere a matriz $A=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\1&1\end{bmatrix}$ e o vetor $b=\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}$.

Justifique por definição de projeção que $\text{proj}_{\mathscr{C}(A)}(b)=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}5\\-4\\1\end{bmatrix}$.

EXERCÍCIOS 31.

1. Determine $\text{proj}_{\mathbb{R}^3}(a,b,c)$ e $\text{proj}_{\{\vec{0}\}}(a,b,c)$ para todo o $a,b,c\in\mathbb{R}$.
   $\text{proj}_{\mathbb{R}^3}(a,b,c)=(a,b,c)$ e $\text{proj}_{\{\vec{0}\}}(a,b,c)=(0,0,0)\ \forall a,b,c\in\mathbb{R}$.

2. Considere $V=<\{(1,0,1),(0,1,1)\}>$. Averigue se $b=(1,1,2)\in V$ e calcule as projeções $\text{proj}_V(b)$ e $\text{proj}_{V^\perp}(b)$.
   Pertence, tendo-se portanto $\text{proj}_V(b)=b$ e $\text{proj}_{V^\perp}(b)=\vec{0}$.

EXERCÍCIOS 32.

1. Determine a projeção do vetor $(2,3)$ sobre o vetor $(3,1)$.

   $\text{proj}_{(3,1)}((2,3))=\left(\frac{27}{10},\frac{9}{10}\right)$.

2. Determine as projeção ortogonais do vetor $(6,5,4)$ sobre a reta $<(1,-1,3)>$ e sobre o seu complemento ortogonal.

   $\text{proj}_{\langle(1,-1,3)\rangle}((6,5,4))=\left(\frac{13}{11},-\frac{13}{11},\frac{39}{11}\right)$ e $\text{proj}_{\langle(1,-1,3)\rangle^\perp}((6,5,4))=\left(\frac{53}{11},\frac{68}{11},\frac{5}{11}\right)$.

EXERCÍCIOS 33.

1. Considere o vetor $b=(4,-1,1)$ e os seguintes subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^3$,

$$U=\{(x,y,z): x+y+z=0\} \quad \text{e} \quad V=<(1,0,1),(0,1,1)>.$$

   (a) Determine as projeções ortogonais de $b$ sobre $U^\perp$, $U$, $V^\perp$ e $V$.
   $\text{proj}_{U^\perp}(b)=\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)$.
   $\text{proj}_U(b)=\left(\frac{8}{3},-\frac{7}{3},-\frac{1}{3}\right)$.
   $\text{proj}_{V^\perp}(b)=\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)$.
   $\text{proj}_V(b)=\left(\frac{10}{3},-\frac{5}{3},\frac{5}{3}\right)$.

   (b) Calcule as distâncias de $b$ a $U$ e a $V$.
   $d(b,U)=\|\text{proj}_{U^\perp}(b)\|=\left\|\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)\right\|=\left|\frac{4}{3}\right|\,\|(1,1,1)\|=\frac{4}{3}\sqrt{3}$.
   $d(b,V)=\frac{2}{3}\sqrt{3}$.

   (c) Identifique o vetor de $V$ a menor distância do vetor $b$.
   O vetor de $V$ a menor distância de $b$ é $\text{proj}_V(b)=\left(\frac{10}{3},-\frac{5}{3},\frac{5}{3}\right)$.

2. Determine a projeção do vetor $(0,2,5,-1)$ sobre o subespaço vetorial de $\mathbb{R}^4$ gerado pelos vetores $(1,1,0,2)$ e $(-1,0,0,1)$.

   $\text{proj}_{\langle(1,1,0,2),(-1,0,0,1)\rangle}((0,2,5,-1))=\left(\frac{7}{11},\frac{1}{11},0,-\frac{4}{11}\right)$.

3. Considere o subespaço vetorial de $\mathbb{R}^4$

$$U=\{(x_1,x_2,x_3,x_4): x_1+x_2-x_3+x_4=0,\ x_2-x_3=0\}$$

   e o vetor $v=(2,1,0,1)$. Determine as projeções ortogonais de $v$ sobre $U$ e sobre complemento ortogonal de $U$.

   $\text{proj}_U((2,1,0,1))=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$, $\text{proj}_{U^\perp}((2,1,0,1))=\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$.

4. Defina a matriz de projeção sobre o plano de equação $x+2y+3z=0$.

$$P=\frac{1}{14}\begin{bmatrix} 13 & -2 & -3 \\ -2 & 10 & -6 \\ -3 & -6 & 5 \end{bmatrix}.$$

5. Considere o vetor $w=(1,-2,2,2)$ e o subespaço $V=<\{(1,2,0,0),(1,0,1,1)\}>$.

   (a) Defina a matriz de projeção $P$ sobre o subespaço $V$.

$$P=\frac{1}{14}\begin{bmatrix} 6 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 12 & -2 & -2 \\ 4 & -2 & 5 & 5 \\ 4 & -2 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

   (b) Determine a projeção de $w$ sobre $V$.
   $\text{proj}_V(w)=Pw=(1,-2,2,2)$.

6. Sejam $A$ uma matriz do tipo $m \times n$, com característica $n$ e $P = A(A^\top A)^{-1}A^\top$ a matriz de projeção sobre $\mathscr{C}(A)$. Prove os seguintes resultados.

   (a) $P^\top = P$ ($P$ é simétrica).

   (b) $P^2 = P$ ($P$ é idempotente).

7. Verifique que $P = \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ é a matriz de projeção sobre o subespaço vetorial $W = \{(x, y, z, t) : x = y,\ z = t\}$.

8. Considere os vetores $u = (1, -1, 0, 1)$, $v = (0, 1, 0, 1)$ e $b = (2, -1, 0, 1)$.

   (a) Justifique que $\{u, v\}$ é base ortogonal do subespaço $V$ de $\mathbb{R}^4$ gerado pelos vetores $u$ e $v$.

   (b) Determine a projeção ortogonal do vetor $b$ sobre $V$.
   $\mathrm{proj}_{\langle u,v\rangle}(b) = \left(\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, 0, \frac{4}{3}\right)$.

9. Considere os vetores $a = (1, -1, 1)$, $b = (-1, 1, 2)$ e $c = (1, 1, 0)$.

   (a) Mostre que $\{a, b, c\}$ é base ortogonal de $\mathbb{R}^3$.

   (b) Escreva o vetor $(0, 2, 4)$ como combinação linear de $a$, $b$ e $c$.
   $(0, 2, 4) = \dfrac{2}{3}a + \dfrac{5}{3}b + c$.

10. (a) Utilizando o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt, determine uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ que inclua o vetor $(1, 0, 1)$.
    Uma possível base ortogonal é $\{(1, 0, 1), (1, 0, -1), (0, 1, 0)\}$.

    (b) Transforme a base obtida na alínea anterior numa base ortonormada de $\mathbb{R}^3$.
    Tomando os versores dos vetores da base anterior obtém-se a b.o.n,
    $\left\{\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right), (0, 1, 0)\right\}$.

11. Seja $V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \ :\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0\}$.

    (a) Utilizando o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt determine uma base ortogonal de $V$.
    Uma possível base ortogonal é $\{(-1, 1, 0, 0), (1, 1, 2, 0), (-1, -1, 1, 3)\}$.

    (b) Seja $b = (2, 1, 0, 1)$. Calcule a projeção de $b$ sobre o subespaço $V$.
    $\mathrm{proj}_V(b) = (1, 0, 1, 0)$.

12. Considere $W = \langle (1,1,1,-1),(0,1,2,-1) \rangle$ e $b = (4,-1,0,3)$.

   (a) Determine uma base e a dimensão de $W^\perp$.

   Uma possível base é $\{(1,-2,1,0),(0,1,0,1)\}$ e a dimensão é 2.

   (b) Indique uma base ortogonal de $\mathbb{R}^4$ que contenha uma base de $W$.

   Uma possível base ortogonal é $\{(1,1,1,-1),(-1,0,1,0),(1,-2,1,0),(1,1,1,3)\}$.

   (c) Calcule $\text{proj}_{W^\perp}(b)$.

   $\text{proj}_{W^\perp}(b) = (2,-1,2,3)$.

   (d) Calcule as distâncias de $b$ a $W$ e $W^\perp$.

   $d(b,W) = \sqrt{18}$, $d(b,W^\perp) = \sqrt{8}$.

13. Determine uma base ortogonal de $\mathbb{R}^4$ que inclua uma base de cada um dos seguintes subespaços vetoriais

   (a) $\langle (1,0,1,0),(1,1,1,1),(1,-1,1,-1) \rangle$

   Uma possível base ortogonal é $\{(1,0,1,0),(0,1,0,1),(-1,0,1,0),(0,-1,0,1)\}$.

   (b) $\{(x,y,z,w) : x-y-z+w=0,\ x+z=0\}$

   Uma possível base ortogonal é
   $\{(-1,-2,1,0),(-1,1,1,3),(1,0,1,0),(1,-1,-1,1)\}$.

14. Considere $v_1 = (1,0,1,0)$, $v_2 = (1,1,1,1)$, $v_3 = (1,-1,1,-1)$, $A = [\,v_1\ \ v_2\ \ v_3\,]$ e $b = (1,2,3,4)$. Indique uma solução dos mínimos quadrados do sistema $Ax = b$. Será que essa solução corresponde a uma solução de $Ax = b$ no sentido usual ?

   Uma possível solução dos mínimos quadrados, isto é, de $Ax = \text{proj}_{\mathscr{C}(A)}(b)$, é $u = (-1,3,0)$, que não corresponde a uma solução de $Ax = b$ pois $Au \neq b$. De facto, tem-se $Au = \text{proj}_{\mathscr{C}(A)}(b) \neq b$, pois $b \notin \mathscr{C}(A)$ (verifique).

## Exercícios variados

EXERCÍCIO 34. Determine os vetores de norma $\sqrt{21}$ que são solução de $Ax = b$ com

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

$(0,1,2,4)$ e $\left(-\frac{10}{3}, -\frac{7}{3}, 2, \frac{2}{3}\right)$

EXERCÍCIOS 35.

1. Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 6 & 2 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}$.

   (a) Indique uma base e a dimensão de $\mathscr{C}(A)$.
   Uma possível base é $\{(1,0,-2),(0,1,6),(2,-1,2)\}$ e dimensão é 3.

   (b) Descreva, analitica e geometricamente, $\mathscr{C}(A)$.
   $\mathbb{R}^3$

   (c) Qual a dimensão de $\mathscr{N}(A)$?
   $\dim \mathscr{N}(A) = 0$.

   (d) Calcule a projeção de $b$ sobre $\mathscr{C}(A)$.
   $\text{proj}_{\mathscr{C}(A)}(b) = \text{proj}_{\mathbb{R}^3}(b) = b$.

2. Considere $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y\}$

   (a) Indique uma base e a dimensão de $V$.
   Uma possível base é $\{(1,1,0),(0,0,1)\}$ e a dimensão é 2.

   (b) Determine o conjunto de todos os vetores ortogonais a $V$.
   $V^\perp = \langle(1,-1,0)\rangle$ que representa uma reta de $\mathbb{R}^3$ que passa na origem com a direção do vetor $(1,-1,0)$.

   (c) Calcule a matriz de projeção sobre $V$.
   $$P = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

3. Considere uma matriz $A_{3\times 4}$ tal que $\{(2,3,1,0)\}$ é uma base para $\mathscr{N}(A)$.

   (a) Qual a característica de $A$?
   $\text{car}(A) = 3$.

   (b) Indique as soluções de $Ax = 0$.
   $\mathscr{N}(A) = \langle(2,3,1,0)\rangle$.

   (c) Escreva a matriz de projeção sobre $\mathscr{N}(A)$.
   $$P = \frac{vv^T}{v^Tv} = \frac{1}{14}\begin{bmatrix} 4 & 6 & 2 & 0 \\ 6 & 9 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ em que } v = (2,3,1,0).$$

   (d) Calcule a distância de $b = (0,2,1,0)$ a $\mathscr{N}(A)$.
   $\left\|\left(-1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)\right\| = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

4. Determine uma base ortogonal para cada um dos subespaços vetoriais

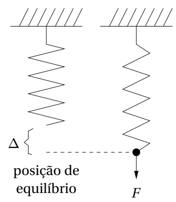
   (a) $\langle(1,1,1),(1,0,-1),(0,3,1)\rangle$
   Uma possível base ortogonal é $\{(1,1,1),(1,0,-1),(-1,2,-1)\}$.

   (b) $\langle(1,0,1,0),(1,1,1,1),(1,-1,1,-1)\rangle$
   Uma possível base ortogonal é $\{(1,0,1,0),(0,1,0,1)\}$.

   (c) $\{(x,y,z): x+y=0,\ y+z=0\}$
   Uma possível base ortogonal é $\{(1,-1,1)\}$.

   (d) $\{(x,y,z,w): x-y-z+w=0,\ x+z=0\}$
   Uma possível base ortogonal é $\{(-1,-2,1,0),(-1,1,1,3)\}$.

5. Segundo a *lei de Hooke*, o deslocamento $x$ de uma mola relativamente à sua posição de equilíbrio, é proporcional à força aplicada na mola, isto é, verifica uma relação do tipo $F = k\,x$ em que $k$ é uma constante positiva designada por *constante elástica da mola* (esta lei é uma aproximação apenas válida para pequenas deformações da mola).




Foram efectuados diversos deslocamentos numa mola e registadas as forças que foram necessárias para produzir esses deslocamentos, assinaladas no seguinte quadro.

| $x_i$ (m) | 0.1 | 0.15 | 0.2 | 0.25 | 0.3 | 0.35 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $F_i$ (N) | 2.1 | 3.9 | 5.7 | 8.2 | 10.5 | 11.7 |

Pretende-se estimar o valor da constante elástica da mola $k$ que minimiza o erro $E$ no sentido dos mínimos quadrados, isto é, que minimiza

$$E^2 = (F_1 - k\,x_1)^2 + \cdots + (F_6 - k\,x_6)^2.$$

Interprete geometricamente o resultado obtido.

A constante $k$ é a solução no **sentido dos mínimos quadrados** do sistema sobredeterminado a 6 equações e uma variável $k$, $x\,k = F$ , isto é, a solução no **sentido usual** do sistema $x\,k = \mathrm{proj}_x(F)$. Uma vez que $\mathrm{proj}_x(F) = \dfrac{F^T x}{x^T x}\,x$ com

$$x = (0.1, 0.15, 0.2, 0.25, 0.3, 0.35), \quad \text{e} \quad F = (2.1, 3.9, 5.7, 8.2, 10.5, 11.7),$$

obtém-se o valor aproximado da constante elásica, $k = \dfrac{F^T x}{x^T x} = 32.31655$.