# Capítulo 3

# Ortogonalidade e Projeção Ortogonal

EXERCÍCIOS 27.

1. Calcule as normas dos seguintes vectores.

   (a) $(1,-1,2)$

   (b) $(-1,0,\pi,0)$

   (c) $(5,0,1,0,1,3)$

2. Calcule as distâncias entre os seguintes pares de vectores.

   (a) $(1,-1,2)$ e $(0,-1,0)$.

   (b) $(-1,0,2,0)$ e $(1,0,0,1)$.

   (c) $(5,0,1,0,1,3)$ e $(-1,2,0,1,1,0)$.

3. Considere $v_1 = (1,0,1)$ e $v_2 = (1,1,-1)$.

   (a) Determine os vectores de $\mathbb{R}^3$ que são simultaneamente ortogonais a $v_1$ e $v_2$.

   (b) Indique um vetor unitário de $\mathbb{R}^3$ simultaneamente ortogonal a $v_1$ e $v_2$.

EXERCÍCIOS 28.

1. Justifique que $(2,1,1,-1)$ é ortogonal ao espaço gerado pelos vetores,

$$(1,0,0,2),\ (-1,0,2,0),\ (-1,2,0,0),\ (1,1,1,4).$$

2. Verifique que $(4,2,-1)$ é ortogonal ao espaço das colunas da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

EXERCÍCIOS 29.

1. Determine os complementos ortogonais do espaço das colunas de cada uma das seguintes matrizes (no caso das alíneas a), b) e c) interprete ainda geometricamente o resultado obtido).

   (a) $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

   (d) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

2. Determine os complementos ortogonais dos subespaços gerados por $\{(1,2,2,1), (1,0,2,0)\}$ e por $\{(1,1,2,-1)\}$.

3. Calcule a dimensão e indique uma base do complemento ortogonal para cada um dos seguintes subespaços.

   (a) $<\{(1,1)\}>$.
   (b) $<\{(1,1,3),(1,1,2)\}>$.
   (c) $<\{(1,1,0,0),(0,2,4,5)\}>$.
   (d) $<\{(2,2,1,0),(2,4,0,1),(4,-2,1,-1)\}>$.

4. Indique uma base de $\mathbb{R}^3$ que inclua vetores do subespaço gerado por $\{(1,1,3), (1,1,2)\}$ e do seu complemento ortogonal.

EXERCÍCIO 30. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e o vetor $b = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.
Justifique por definição de projeção que $\text{proj}_{\mathscr{C}(A)}(b) = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$.

EXERCÍCIOS 31.

1. Determine $\text{proj}_{\mathbb{R}^3}(a,b,c)$ e $\text{proj}_{\{\vec{0}\}}(a,b,c)$ para todo o $a,b,c \in \mathbb{R}$.

2. Considere $V =< \{(1,0,1),(0,1,1)\} >$. Averigue se $b = (1,1,2) \in V$ e calcule as projeções $\text{proj}_V(b)$ e $\text{proj}_{V^\perp}(b)$.

EXERCÍCIOS 32.

1. Determine a projeção do vetor $(2,3)$ sobre o vetor $(3,1)$.
2. Determine as projeção ortogonais do vetor $(6,5,4)$ sobre a reta $<(1,-1,3)>$ e sobre o seu complemento ortogonal.

EXERCÍCIOS 33.

1. Considere o vetor $b=(4,-1,1)$ e os seguintes subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^3$,
$$U=\{(x,y,z): x+y+z=0\} \quad \text{e} \quad V=<(1,0,1),(0,1,1)>.$$
   (a) Determine as projeções ortogonais de $b$ sobre $U^{\perp}$, $U$, $V^{\perp}$ e $V$.
   (b) Calcule as distâncias de $b$ a $U$ e a $V$.
   (c) Identifique o vetor de $V$ a menor distância do vetor $b$.
2. Determine a projeção do vetor $(0,2,5,-1)$ sobre o subespaço vetorial de $\mathbb{R}^4$ gerado pelos vetores $(1,1,0,2)$ e $(-1,0,0,1)$.
3. Considere o subespaço vetorial de $\mathbb{R}^4$
$$U=\{(x_1,x_2,x_3,x_4): x_1+x_2-x_3+x_4=0,\ x_2-x_3=0\}$$
e o vetor $v=(2,1,0,1)$. Determine as projeções ortogonais de $v$ sobre $U$ e sobre complemento ortogonal de $U$.
4. Defina a matriz de projeção sobre o plano de equação $x+2y+3z=0$.
5. Considere o vetor $w=(1,-2,2,2)$ e o subespaço $V=<\{(1,2,0,0),(1,0,1,1)\}>$.
   (a) Defina a matriz de projeção $P$ sobre o subespaço $V$.
   (b) Determine a projeção de $w$ sobre $V$.
6. Sejam $A$ uma matriz do tipo $m\times n$, com característica $n$ e $P=A(A^{\top}A)^{-1}A^{\top}$ a matriz de projeção sobre $\mathscr{C}(A)$. Prove os seguintes resultados.
   (a) $P^{\top}=P$ ($P$ é simétrica).
   (b) $P^2=P$ ($P$ é idempotente).
7. Verifique que $P=\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix}1&1&0&0\\1&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&1&1\end{bmatrix}$ é a matriz de projeção sobre o subespaço vetorial $W=\{(x,y,z,t): x=y,\ z=t\}$.
8. Considere os vetores $u=(1,-1,0,1)$, $v=(0,1,0,1)$ e $b=(2,-1,0,1)$.

(a) Justifique que $\{u, v\}$ é base ortogonal do subespaço $V$ de $\mathbb{R}^4$ gerado pelos vetores $u$ e $v$.

(b) Determine a projeção ortogonal do vetor $b$ sobre $V$.

9. Considere os vetores $a = (1, -1, 1)$, $b = (-1, 1, 2)$ e $c = (1, 1, 0)$.

   (a) Mostre que $\{a, b, c\}$ é base ortogonal de $\mathbb{R}^3$.

   (b) Escreva o vetor $(0, 2, 4)$ como combinação linear de $a$, $b$ e $c$.

10. (a) Utilizando o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt, determine uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ que inclua o vetor $(1, 0, 1)$.

    (b) Transforme a base obtida na alínea anterior numa base ortonormada de $\mathbb{R}^3$.

11. Seja $V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0\}$.

    (a) Utilizando o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt determine uma base ortogonal de $V$.

    (b) Seja $b = (2, 1, 0, 1)$. Calcule a projeção de $b$ sobre o subespaço $V$.

12. Considere $W = \langle (1, 1, 1, -1), (0, 1, 2, -1) \rangle$ e $b = (4, -1, 0, 3)$.

    (a) Determine uma base e a dimensão de $W^\perp$.

    (b) Indique uma base ortogonal de $\mathbb{R}^4$ que contenha uma base de $W$.

    (c) Calcule $\mathrm{proj}_{W^\perp}(b)$.

    (d) Calcule as distâncias de $b$ a $W$ e $W^\perp$.

13. Determine uma base ortogonal de $\mathbb{R}^4$ que inclua uma base de cada um dos seguintes subespaços vetoriais

    (a) $\langle (1, 0, 1, 0), (1, 1, 1, 1), (1, -1, 1, -1) \rangle$

    (b) $\{(x, y, z, w) : x - y - z + w = 0, \ x + z = 0\}$

14. Considere $v_1 = (1, 0, 1, 0)$, $v_2 = (1, 1, 1, 1)$, $v_3 = (1, -1, 1, -1)$, $A = [\, v_1 \ \ v_2 \ \ v_3 \,]$ e $b = (1, 2, 3, 4)$. Indique uma solução dos mínimos quadrados do sistema $Ax = b$. Será que essa solução corresponde a uma solução de $Ax = b$ no sentido usual ?

## Exercícios variados

EXERCÍCIO 34. Determine os vetores de norma $\sqrt{21}$ que são solução de $Ax = b$ com

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

EXERCÍCIOS 35.

1. Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 6 & 2 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}$.

   (a) Indique uma base e a dimensão de $\mathscr{C}(A)$.

   (b) Descreva, analitica e geometricamente, $\mathscr{C}(A)$.

   (c) Qual a dimensão de $\mathscr{N}(A)$?

   (d) Calcule a projeção de $b$ sobre $\mathscr{C}(A)$.

2. Considere $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y\}$

   (a) Indique uma base e a dimensão de $V$.

   (b) Determine o conjunto de todos os vetores ortogonais a $V$.

   (c) Calcule a matriz de projeção sobre $V$.

3. Considere uma matriz $A_{3\times 4}$ tal que $\{(2,3,1,0)\}$ é uma base para $\mathscr{N}(A)$.

   (a) Qual a característica de $A$?

   (b) Indique as soluções de $Ax = 0$.

   (c) Escreva a matriz de projeção sobre $\mathscr{N}(A)$.

   (d) Calcule a distância de $b = (0,2,1,0)$ a $\mathscr{N}(A)$.

4. Determine uma base ortogonal para cada um dos subespaços vetoriais

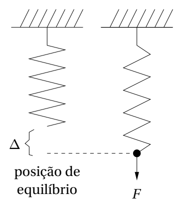
   (a) $\langle(1,1,1),(1,0,-1),(0,3,1)\rangle$

   (b) $\langle(1,0,1,0),(1,1,1,1),(1,-1,1,-1)\rangle$

   (c) $\{(x, y, z) : x + y = 0,\ y + z = 0\}$

   (d) $\{(x, y, z, w) : x - y - z + w = 0,\ x + z = 0\}$

5. Segundo a *lei de Hooke*, o deslocamento $x$ de uma mola relativamente à sua posição de equilíbrio, é proporcional à força aplicada na mola, isto é, verifica uma relação do tipo $F = k\,x$ em que $k$ é uma constante positiva designada por *constante elástica da mola* (esta lei é uma aproximação apenas válida para pequenas deformações da mola).

   Foram efectuados diversos deslocamentos numa mola e registadas as forças que foram necessárias para produzir esses deslocamentos, assinaladas no seguinte quadro.

| $x_i$ (m) | 0.1 | 0.15 | 0.2 | 0.25 | 0.3 | 0.35 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $F_i$ (N) | 2.1 | 3.9 | 5.7 | 8.2 | 10.5 | 11.7 |

Pretende-se estimar o valor da constante elástica da mola $k$ que minimiza o erro $E$ no sentido dos mínimos quadrados, isto é, que minimiza

$$E^2 = (F_1 - k x_1)^2 + \cdots + (F_6 - k x_6)^2.$$

Interprete geometricamente o resultado obtido.