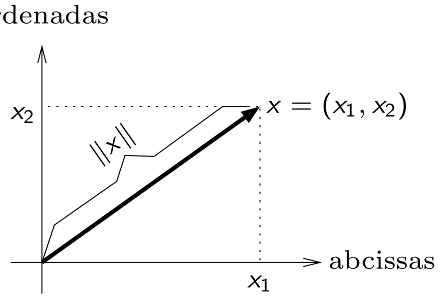
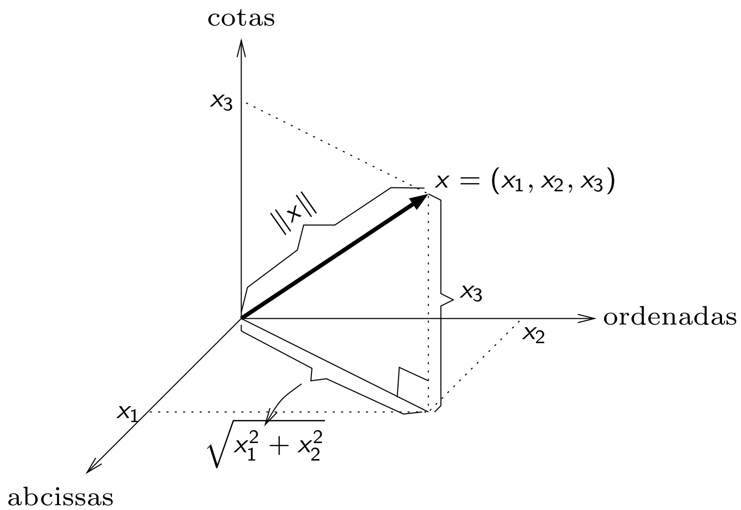
Recordatória: norma (comprimento) de um vetor do plano



$\|x\|$ representa a norma ou comprimento do vetor x, ou seja, a distância do vetor à origem. Pelo teorema de Pitágoras obtém-se,

$$\|x\| = \|(x_1, x_2)\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \sqrt{(x_1, x_2) \cdot (x_1, x_2)} = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{x^T x}$$

Norma de um vetor do espaço



Analogamente, tem-se pelo teorema de Pitágoras,

$$\|x\| = \|(x_1, x_2, x_3)\| = \sqrt{\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right)^2 + x_3^2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = \sqrt{x \cdot x}$$

Norma de um vetor de $\mathbb{R}^n$

Definição de norma (caso geral)

Dado $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ define-se a sua norma (comprimento) por,

$$\boxed{\|x\| = \sqrt{x^T x} = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}}$$

Ex. :$\|(4, 2, -1, 2)\| = \sqrt{(4, 2, -1, 2) \cdot (4, 2, -1, 2)} = \sqrt{4^2 + 2^2 + (-1)^2 + 2^2} = 5.$

Propriedades da norma

Para qualquer $x \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ tem-se

1. $\|x\| \geq 0.$
2. $\|x\| = 0$ se e só se $x = \vec{0}.$
3. $\|\lambda\, x\| = |\lambda|\, \|x\|.$
4. $\|x\|^2 = x \cdot x = x^T x.$

Dem (do ponto 3): $\|\lambda x\| = \sqrt{(\lambda x)^T \lambda x} = \sqrt{\lambda\, x^T \lambda\, x} = \sqrt{\lambda^2}\sqrt{x^T x} = |\lambda| \|x\|.$

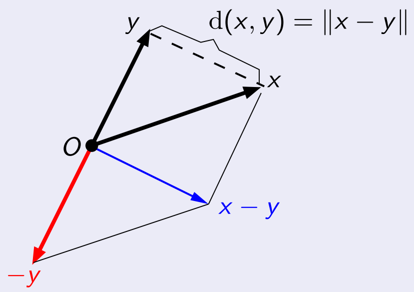
Distância (euclideana) entre vetores de $\mathbb{R}^n$

A partir da norma define-se a *distância (euclideana)* entre vetores de $\mathbb{R}^n$.

Definição distância euclideana

Dados $x, y \in \mathbb{R}^n$ define-se a distância entre x e y por

$$\boxed{\mathrm{d}(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}}$$



Por exemplo,

$$\begin{aligned} d((1,3,2,1),(1,4,3,-1)) &= \|(1,3,2,1) - (1,4,3,-1)\| \\ &= \|(0,-1,-1,2)\| = \sqrt{6}. \end{aligned}$$

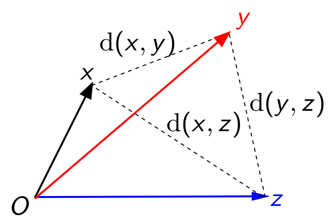
Propriedades da distância

Propriedades da distância

Dados $x, y, z \in \mathbb{R}^n$, tem-se

1. $\mathrm{d}(x, y) \geq 0$.
2. $\mathrm{d}(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
3. $\mathrm{d}(x, y) = \mathrm{d}(y, x)$.
4. $\mathrm{d}(x, z) \leq \mathrm{d}(x, y) + \mathrm{d}(y, z)$.

A propriedade 4. designa-se por desigualdade triangular e significa que o comprimento do lado de qualquer triângulo é inferior ou igual à soma dos comprimentos dos outros dois lados.



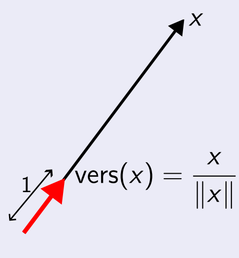
A 3 primeiras propriedades significam que $d(x, y)$ define uma dissemelhança. Uma distância é uma dissemelhança que verifica ainda a propriedade triangular.

Vetor unitário e versor

Definições de vetor unitário e versor

- $x \in \mathbb{R}^n$ diz-se *unitário* se $\|x\| = 1$, isto é, se $x \cdot x = \|x\|^2 = 1$
- A cada vetor $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq \vec{0}$, associamos o **único** vetor unitário com a mesma direção e sentido que x, designado versor de x:

$$\mathrm{vers}(x) = \frac{x}{\|x\|}.$$



Por exemplo, $\mathrm{vers}(3, 4) = \frac{(3,4)}{\|(3,4)\|} = \frac{(3,4)}{5} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$.

Note-se que $\|\mathrm{vers}(3, 4)\| = \|\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)\| = \sqrt{\frac{9}{25} + \frac{16}{25}} = 1$.

Ortogonalidade entre vetores

Vetores ortogonais

Dois vetores $u, v \in \mathbb{R}^m$ dizem-se *ortogonais* ($u \perp v$) se $u \cdot v = 0$, ou equivalentemente, usando a notação matricial, $u^T v = 0$.

Por exemplo, os vetores $u = (-4, 1, 2, 1) = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ e

$v = (1, 1, 1, 1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ são ortogonais pois

$$u \cdot v = u^T v = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = -4 + 1 + 2 + 1 = 0.$$

Ortogonalidade entre um vetor e um subespaço vetorial

Consideremos o plano de $\mathbb{R}^3$ que passa na origem,

$$V = \{(x_1, x_2, x_3) \colon\ x_1 + 2\,x_2 + 3\,x_3 = 0\}.$$

Podemos escrever,

$$V = \{(x_1, x_2, x_3) \colon (x_1, x_2, x_3) \cdot (1, 2, 3) = 0\},$$

o que significa que o vetor normal ao plano V, $(1, 2, 3)$, é perpendicular a todos os vetores de V. Diz-se então que $(1, 2, 3)$ é ortogonal ao subespaço V, que se denota por $(1, 2, 3) \perp V$.

Mais geralmente tem-se a seguinte definição

Vetor ortogonal a um subespaço vetorial

Sejam $u \in \mathbb{R}^m$ e V subespaço vetorial de $\mathbb{R}^m$. Diz-se que é *u ortogonal a V* e denota-se $u \perp V$ se u for ortogonal a todos os vetores de V isto é, se $u^T v = 0$ para qualquer $v \in V$.

Vetor ortogonal a um subespaço dado por geradores

O seguinte resultado mostra que para verificarmos que um vetor é ortogonal a um subespaço vetorial basta mostrar que é ortogonal a um conjunto de geradores desse subespaço.

Teorema (resultado chave)

Sejam $u \in \mathbb{R}^m$ e $V = \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$ subespaço vetorial de $\mathbb{R}^m$. Tem-se,

$$u \perp V \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} u \perp v_1, \\ \quad \vdots \\ u \perp v_n. \end{cases}$$

Exercício na aula

Exercício

Sejam $v_1 = (1, 2, -1)$, $v_2 = (2, 0, 2)$, $V = \langle v_1, v_2 \rangle$ e $b = (1, -1, -1)$. Prove que $b \perp V$.

Resolução: tem-se:

- $b \perp v_1$ pois $v_1 \cdot b = v_1^T b = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = 0.$
- $b \perp v_2$ pois $v_2 \cdot b = v_2^T b = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = 0.$

Como $b \perp v_1$ e $b \perp v_2$, conclui-se pela proposição do slide 145 que $b \perp V = \langle v_1, v_2 \rangle$.

Complemento ortogonal de um subespaço vetorial

Definição de complemento ortogonal

Seja V subespaço vetorial de $\mathbb{R}^m$. Chama-se *complemento ortogonal* de V e denota-se por $V^\perp$, ao conjunto de todos os vetores de $\mathbb{R}^m$ que são ortogonais a V, isto é,

$$V^\perp = \{x \in \mathbb{R}^m \ : \ x \perp V\}$$

- Note-se que por definição de complemento ortogonal, tem-se

$$\boxed{u \perp V \Leftrightarrow u \in V^\perp}$$

- Vejamos como determinar o complemento ortogonal num exemplo, que nos irá sugerir também um método geral para calcular complementos ortogonais de subespaços vetoriais arbitrários.

Exemplo

Consideremos novamente os vetores $v_1 = (1, 2, -1)$, $v_2 = (2, 0, 2)$ e seja $A = [\, v_1 \ \ v_2 \,]$. Vamos determinar $\mathcal{C}(A)^\perp = \{x \in \mathbb{R}^3 : x \perp \mathcal{C}(A)\}$.

Dado $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ tem-se:

$$x \perp \mathcal{C}(A) = \langle v_1, v_2 \rangle \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} v_1 \perp x \\ v_2 \perp x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1^T x = 0 \\ \\ v_2^T x = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \\ \\ \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow A^T x = \vec{0}.$$

Logo, $\mathcal{C}(A)^\perp = \{x \in \mathbb{R}^3 \ : \ A^T x = \vec{0}\} = \mathcal{N}(A^T) = \cdots = \langle (-1, 1, 1) \rangle$ (verifique).

Uma relação fundamental

A relação estabelecida no slide 148 pode ser generalizada para o espaço das colunas de uma matriz arbitrária A. Mais precisamente tem-se o seguinte.

Complemento ortogonal do espaço de colunas / espaço gerado

Sejam $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^m$ e $A = [\, v_1 \ \ \cdots \ \ v_n \,]$. Tem-se:

$$\boxed{\mathcal{C}(A)^\perp = \langle v_1, \ldots, v_n \rangle^\perp = \mathcal{N}(A^T).}$$

- Em geral, se V subespaço vetorial $\mathbb{R}^m$ de dimensão $k > 0$ e $\{v_1, \ldots, v_k\}$ é base de V, podemos escrever $V = \mathcal{C}(A)$ onde $A_{m\times k} = [v_1 \ \cdots \ v_k]$ é a matriz da base.
- Logo $V^\perp = \mathcal{C}(A)^\perp = \mathcal{N}(A^T)$ é também um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^m$ e tem-se, atendendo a que o número de colunas de A^T é m,

$$\dim V^\perp = \dim \mathcal{N}(A^T) = m - \text{car}(A^T) = m - \text{car}(A) = m - \dim V.$$

Estas e outras propriedades do complemento ortogonal estão reunidas no teorema do próximo slide.

Propriedades do complemento ortogonal

Teorema

Seja V um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^m$. Então $V^\perp$ é também subespaço vetorial de $\mathbb{R}^m$ e tem-se:

- $V \cap V^\perp = \{\vec{0}\}$.
- $(V^\perp)^\perp = V$.
- $\dim V + \dim V^\perp = \dim \mathbb{R}^m = m$.
- Se $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é base de V e $\{w_1, \ldots, w_{m-n}\}$ é base de $V^\perp$, então

$$\{\underbrace{v_1, \ldots, v_n}_{\text{base de } V}, \underbrace{w_1, \ldots, w_{m-n}}_{\text{base de } V^\perp}\},$$

  é base de $\mathbb{R}^m$.

Note-se que a relação $V \cap V^\perp = \{\vec{0}\}$ significa que o vetor nulo é o **único** vetor que é ortogonal a si próprio.

A relação $(V^\perp)^\perp = V$ significa que se $W = V^\perp$ então $W^\perp = V$.