INSTITUTO SUPERIOR DE AGRONOMIA

$1^{\underline{o}}$ teste de Álgebra Linear

28 de outubro de 2024 - Duração: 1h30

Guarde todos os equipamentos eletrónicos, incluindo telemóveis, calculadoras e *smartwatches* na mala/mochila fechada ou coloque-os na secretária do docente.
O incumprimento das regras leva à **anulação da prova**.

Apresente os cálculos que efetuar e justifique todas as respostas.

Número: Nome:

[6.5v] 1. Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \alpha & 1 & 1 \\ 0 & \alpha & -\alpha \end{bmatrix} = [\, v_1 \ v_2 \ v_3 \,]$ e $b = (0,1,0)$, com $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Discuta o sistema $Ax = b$ para todos os valores de $\alpha \in \mathbb{R}$.

Para $\alpha \neq 0, 2$ o sistema é PD. Para $\alpha = 0$ o sistema é PI. Para $\alpha = 2$ o sistema é IMP.

(b) Considere $\alpha = 1$.

i. Determine A^{-1}.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

ii. Use A^{-1} para resolver o sistema $Ax = b$.

$$x = A^{-1}b = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

iii. Seja T a transformação linear definida pela matriz A. Calcule $T(1,2,3)$.

$$T(1,2,3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

[6v] 2. Considere $v_1 = (1,-1,2)$, $v_2 = (-1,2,1)$ e $v_3 = (1,0,5)$ e seja $V = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$.

(a) Determine uma base e a dimensão de V.

Uma base de V é $\{v_1, v_2\}$ e $\dim V = 2$ (número de vetores da base)

(b) Descreva V geometricamente.

Trata-se de um plano de $\mathbb{R}^3$ que passa na origem, com vetores diretores v_1 e v_2 e vetor normal $(-5,-3,1)$.

(c) Justifique que $v_3 \in \langle v_1, v_2 \rangle$.

De facto, $v_3 \in V$ porque v_3 é gerador de V com $V = \langle v_1, v_2 \rangle$ porque $\{v_1, v_2\}$ é base de V. Alternativamente, pode-se justificar que o sistema com matriz ampliada $[v_1 \ v_2 \,|\, v_3]$ é possível…

(d) Indique um vetor $b \in \mathbb{R}^3$ tal que $\langle v_1, v_2, b \rangle = \mathbb{R}^3$.

Por exemplo, o vetor normal ao plano, $b = (-5,-3,1)$. Qualquer vetor de $\mathbb{R}^3$ que não pertença a V serve.

[5.5v] 3. Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} = [\, u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_4 \,]$.

(a) Mostre que $\{(1,-5,1,2),(-1,-2,1,1)\}$ é base de $\mathcal{N}(A)$.
Ver os slides 133 e 134...

(b) Justifique que o conjunto $\{u_1,u_2,u_3,u_4\}$ é linearmente dependente e escreva um dos vetores do conjunto como combinação linear dos restantes vetores do conjunto.
Por exemplo, $v_1 = -2v_2 + v_3 + v_4$.

[2v] 4. Sejam $u, v, w \in \mathbb{R}^m$ tais que:

(i) $w \in \langle u, v\rangle$.

(ii) $\{w, u\}$ é linearmente independente.

Prove que $v \in \langle u, w\rangle$.

Cotação (não preencher)

1a)	**1b)i**	**1b)ii**	**1b)iii**	**2a)**	**2b)**	**2c)**	**2d)**	**3a)**	**3b)**	**4)**	**Total**
2,5	2	1	1	2	1,25	1,25	1,5	3	2,5	2	20