EXERCÍCIO 47. Indique, justificando, quais das matrizes do exercício 44 são diagonalizáveis.

EXERCÍCIO 48. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

a) Calcule os valores próprios de A e as respetivas multiplicidades algébricas.

b) Indique um vetor próprio de A.

d) Será que existe uma matriz quadrada P, de ordem 3, invertível tal que $P^{-1}AP$ é uma matriz diagonal? Justifique.

EXERCÍCIO 49. Determine uma matriz de diagonalização de cada uma das seguintes matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

EXERCÍCIO 50. Seja A uma matriz quadrada de ordem 3 que admite o valor próprio 1 multiplicidade algébrica 2 e vetores próprios $(1,0,-1)$, $(0,1,1)$ associados ao valor próprio 1.

a) Justifique que A é diagonalizável.

b) Determine A assumindo que $(-1,1,0)$ é também vetor próprio de A associado ao valor próprio 2,

EXERCÍCIO 51. Considere $A = \begin{bmatrix} 11 & 6 \\ -18 & -10 \end{bmatrix}$.

1. Justifique que A é diagonalizável e determine uma matriz de diagonalização para A.
2. Calcule A^{10}.

EXERCÍCIO 52. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$.

a) Indique uma matriz de diagonalização.

b) Prove que $\lim_{n \to +\infty} A^n = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$.

EXERCÍCIO 53. Seja $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

a) Verifique que o polinómio característico de A é $p(\lambda) = \lambda(1-\lambda)(\lambda - \dfrac{1}{4})$.

b) Determine uma matriz invertível P tal que $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$.

EXERCÍCIOS 54.

1. Considere $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ a & b \end{bmatrix}$, com $a, b \in \mathbb{R}$.

   a) Para $a = 2$ e $b = 1$, indique uma matriz de diagonalização.

   b) Se $b = 2$, para que valores de a é A ortogonalmente diagonalizável?

   c) Se $b = 2$, existirá algum $a > 0$ tal que $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ e A sejam semelhantes? Justifique.

2. Indique uma matriz ortogonal de diagonalização da matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$.

3. Prove os seguintes resultados.

   a) Matrizes ortogonalmente diagonalizáveis são simétricas.

   b) Se λ é um valor próprio real não nulo de uma matriz A e v um vetor próprio associado a λ, então λ tem o sinal de $v^T Av$.