EXERCÍCIO 47. Indique, justificando, quais das matrizes do exercício 44 são diagonalizáveis.

A sim, B sim, C não, D não, E sim, F sim, G não.

EXERCÍCIO 48. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

a) Calcule os valores próprios de A e as respetivas multiplicidades algébricas.

Admite os valores próprios 0 e 1 com multiplicidades algébricas 1 e 2, respectivamente.

b) Indique um vetor próprio de A.

Por exemplo, $(0,1,1)$ é um vetor próprio associado ao valor próprio $\lambda = 1$.

d) Será que existe uma matriz quadrada P, de ordem 3, invertível tal que $P^{-1}AP$ é uma matriz diagonal? Justifique.

Não, porque $m.g.(1) < m.a.(1)$ (verifique).

EXERCÍCIO 49. Determine uma matriz de diagonalização de cada uma das seguintes matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

A: $P = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -3 \\ 5 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, tendo-se $P^{-1}AP = \mathrm{diag}(-4,1,3)$.

B: $P = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, tendo-se $P^{-1}BP = \mathrm{diag}(0,2,2)$.

C: $P = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 5 \\ 3 & -4 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \end{bmatrix}$, tendo-se $P^{-1}CP = \mathrm{diag}(-4,1,6)$.

EXERCÍCIO 50. Seja A uma matriz quadrada de ordem 3 que admite o valor próprio 1 multiplicidade algébrica 2 e vetores próprios $(1,0,-1)$, $(0,1,1)$ associados ao valor próprio 1.

a) Justifique que A é diagonalizável.

b) Determine A assumindo que $(-1,1,0)$ é também vetor próprio de A associado ao valor próprio 2,

$$A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

EXERCÍCIO 51. Considere $A = \begin{bmatrix} 11 & 6 \\ -18 & -10 \end{bmatrix}$.

1. Justifique que A é diagonalizável e determine uma matriz de diagonalização para A.

   Possível matriz de diagonalização é $P = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, tendo-se $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

2. Calcule A^{10}.

   $$\begin{bmatrix} 4093 & 2046 \\ -6138 & -3068 \end{bmatrix}$$

EXERCÍCIO 52. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$.

a) Indique uma matriz de diagonalização.

$P = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, tendo-se $P^{-1}AP = \mathrm{diag}(-\frac{1}{5}, 1)$.

b) Prove que $\lim\limits_{n\to+\infty} A^n = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$.

EXERCÍCIO 53. Seja $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

a) Verifique que o polinómio característico de A é $p(\lambda) = \lambda(1-\lambda)(\lambda - \frac{1}{4})$.

b) Determine uma matriz invertível P tal que $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$.

$P = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

EXERCÍCIOS 54.

1. Considere $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ a & b \end{bmatrix}$, com $a, b \in \mathbb{R}$.
   a) Para $a = 2$ e $b = 1$, indique uma matriz de diagonalização.
      $P = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, tendo-se $P^{-1}AP = \mathrm{diag}(0,3)$.
   b) Se $b = 2$, para que valores de a é A ortogonalmente diagonalizável?
      $a = 1$
   c) Se $b = 2$, existirá algum $a > 0$ tal que $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ e A sejam semelhantes? Justifique.
      Não, porque não têm o mesmo traço.

2. Indique uma matriz ortogonal de diagonalização da matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$.

   $P = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$, tendo-se $P^TAP = \mathrm{diag}(2,2,8)$.

3. Prove os seguintes resultados.
   a) Matrizes ortogonalmente diagonalizáveis são simétricas.
   b) Se λ é um valor próprio real não nulo de uma matriz A e v um vetor próprio associado a λ, então λ tem o sinal de v^TAv.