Propriedades dos valores próprios - exemplo

Consideremos a matriz A do exemplo do slide 209 e a respectiva informação espectral do slide 216,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

λ	m.a.(λ)	m.g.(λ)	base de $E(\lambda)$
1	2	2	$\{(1,0,0),(0,0,1)\}$
2	1	1	$\{(1,1,1)\}$

Constata-se que:

- $2 = \text{m.g.}(1) \leq \text{m.a.}(1) = 2$
  $1 = \text{m.g.}(2) \leq \text{m.a.}(2) = 1$.
- $\text{m.a.}(1) + \text{m.a.}(2) = 2 + 1 = 3 = n$ (ordem da matriz A).
- A soma dos valores próprios de A contando com repetições (m.a.), $1 + 1 + 2 = 4$, coincide com $tr(A) = 1 + 2 + 1 = 4$ (soma das entradas da diagonal principal).
- O produto dos valores próprios de A, contando com repetições (m.a.), $1 \times 1 \times 2$ coincide com $\det(A) = 2$ (verifique).
- Como $\lambda = 0$ não é valor próprio a matriz A é invertível.

Diagonalização de matrizes

Definição de matriz diagonalizável

Uma matriz A de ordem n diz-se diagonalizável se existir uma matriz invertível P e uma matriz diagonal D tal que

$$P^{-1} A P = D.$$

A matriz P designa-se por matriz de diagonalização para A.

Observação

Consideremos $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ e $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Tem-se

$$P^{-1} A P = D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Como obter uma matriz de diagonalização P?

Diagonalização e base própria

Seja A uma matriz quadrada de ordem n e $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ uma matriz diagonal. Dada uma matriz invertível $P = [\, v_1 \quad \cdots \quad v_n \,]$, isto é, uma matriz de uma base $\{v_1, \dots, v_n\}$ de $\mathbb{R}^n$, têm-se as equivalências

$$P^{-1}AP = D \quad \Leftrightarrow \quad P\,P^{-1}AP = PD \quad \Leftrightarrow \quad AP = PD.$$

Como se tem,

$$\begin{aligned} AP \quad &= \quad A[\, v_1 \quad v_2 \quad \cdots \quad v_n \,] = [\, Av_1 \quad Av_2 \quad \cdots \quad Av_n \,], \quad \text{e} \\ PD \quad &= \quad [\, v_1 \quad v_2 \quad \cdots \quad v_n \,] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} = [\, \lambda_1 v_1 \quad \lambda_2 v_2 \quad \cdots \quad \lambda_n v_n \,], \end{aligned}$$

conclui-se que $AP = PD$ se só se $Av_i = \lambda_i v_i$, para todo o $i = 1, \dots, n$.

Logo A é diagonalizável com matriz de diagonalização P tal que

$$P^{-1}AP = D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n),$$

se e só se $\{v_1, \dots, v_n\}$ for uma base de $\mathbb{R}^n$ formada por vetores próprios de A associados aos valores próprios $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Propriedades dos vetores próprios

Observação

Sejam A matriz quadrada de ordem n e $\lambda'_1, \ldots, \lambda'_k$ os valores próprios distintos de A.

- Pode-se mostrar que existe uma base de $\mathbb{R}^n$ formada por vetores próprios de A se e só se

$$\text{m.g.}(\lambda'_1) + \cdots + \text{m.g.}(\lambda'_k) = n.$$

  Esta base é obtida reunindo bases dos subespaços próprios $E(\lambda'_1)$, ..., $E(\lambda'_k)$.

- Uma vez que soma das m. a. dos valores próprios distintos de A é igual à ordem da matriz A e que a multiplicidade geométrica de qualquer valor próprio é sempre inferior ou igual à sua multiplicidade algébrica, a condição anterior é equivalente à condição

$$\text{m.g.}(\lambda'_i) = \text{m.a.}(\lambda'_i), \quad i = 1, \ldots, k.$$

Critérios de diagonalização

Teorema

Seja A matriz quadrada de ordem n. As seguintes afirmações são equivalentes:

(i) A é diagonalizável.

(ii) Existe uma base de $\mathbb{R}^n$ formada por vetores próprios de A.

(iii) A soma das multiplicidades geométricas dos valores próprios distintos de A é n.

(iv) $\text{m.g.}(\lambda) = \text{m.a.}(\lambda)$ para qualquer valor próprio λ de A.

Nas condições equivalentes anteriores a matriz $P = \begin{bmatrix} v_1 & \cdots & v_n \end{bmatrix}$ onde $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é uma base de $\mathbb{R}^n$ formada por vetores próprios de A, obtida reunindo bases de todos os subespaços próprios de A, é uma matriz de diagonalização para A que verifica,

$$P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n),$$

com λ_i valor próprio associado ao vetor próprio v_i, para $i = 1, \ldots, n$.

Exemplo do slide 209 revisitado

Consideremos novamente a matriz A do exemplo do slide 209 e a respectiva informação espectral do slide 216,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

λ	$m.a.(\lambda)$	$m.g.(\lambda)$	base de $E(\lambda)$
1	2	2	$\{(1,0,0),(0,0,1)\}$
2	1	1	$\{(1,1,1)\}$

- Uma vez que m.g.$(1) =$ m.a.$(1) = 2$ e m.g.$(2) =$ m.a.$(2) = 1$, A é a diagonalizável e o conjunto

$$\{u_1, u_2, u_3\} = \{(1,0,0,),(0,0,1),(1,1,1)\},$$

obtido reunindo a base $\{(1,0,0),(0,0,1)\}$ de $E(1)$ com a base $\{(1,1,1)\}$ de $E(2)$ é uma base de $\mathbb{R}^3$ formada por vetores próprios de A.

- Logo a matriz desta base própria, $P = [\, u_1 \;\; u_2 \;\; u_3 \,] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ é uma matriz de diagonalização para A, tendo-se (verifique),

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Exemplo

- Consideremos agora a matriz $D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ do exercício 44, cujos valores próprios distintos são $\lambda = 1$ e $\lambda = 6$, tendo-se $\text{m.a.}(1) = 2 > \text{m.g.}(1) = 1$ e $\text{m.a.}(6) = \text{m.g.}(6) = 1$.
- Como $\text{m.g.}(1) \neq \text{m.a.}(1)$ não existe uma base de $\mathbb{R}^3$ formada por vetores próprios de D e portanto D não é diagonalizável.
- Neste caso a cardinalidade (número de vetores) máxima de um conjunto linearmente independente formado por vetores próprios de D é $\text{m.g.}(1) + \text{m.g.}(6) = 2 < 3 = \dim \mathbb{R}^3$.