Capítulo 2

Espaços vetoriais

ESPAÇO NULO

Exercício 14. Determine e interprete geometricamente o espaço nulo das seguintes matrizes.

a) $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -6 & -8 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 5 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

g) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 4 & -6 & 2 \end{bmatrix}$ h) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & -6 & 6 \end{bmatrix}$ i) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 9 & -3 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$.

COMBINAÇÃO LINEAR E ESPAÇO DAS COLUNAS

Exercícios 15.

1. Escreva $(-3,12,12)$ como combinação linear dos vetores $v_1 = (-1,3,1)$, $v_2 = (0,2,4)$ e $v_3 = (1,0,2)$.

2. Em cada uma das alíneas seguintes, verifique se o vetor u é combinação linear dos vetores de V.

   a) $u = (3,-5)$, $V = \{(1,2),(-2,6)\}$;

   b) $u = (1,1,1)$, $V = \{(1,0,1),(0,3,5)\}$;

   c) $u = (2,-2,\frac{1}{6},\frac{1}{6})$, $V = \{(1,-1,0,0),(2,0,1,1),(0,3,1,1)\}$;

   d) $u = (0,1,0,1,0)$, $V = \{(1,2,2,1,1),(\frac{2}{3},1,\frac{4}{3},1,\frac{2}{3})\}$.

3. Averigue se $(0,1,4) \in \langle (1,3,-5),(2,9,4) \rangle$ e interprete geometricamente a situação.

4. Justifique que $(3,1)$ está no espaço das colunas da matriz $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 4 & 3 & 9 \end{bmatrix}$ e escreva-o como combinação linear das colunas dessa matriz.

5. Determine os espaços das colunas relativos às matrizes do exercício 14.

Independência linear

Exercícios 16.

1. Decida sobre a independência linear dos seguintes conjuntos de vetores.

   a) $\{(3,1),(4,-2)\}$
   b) $\{(3,1),(4,-2),(7,2)\}$
   c) $\{(-1,2,0,2),(5,0,1,1),(8,-6,1,-5)\}$
   d) $\{(-1,2,0,2),(5,0,1,1),(8,-6,1,-5),(0,0,0,1)\}$
   e) $\{(0,-3,1),(2,4,1),(-2,8,5)\}$.

2. Decida sobre a independência linear dos conjuntos de vetores,
   $U = \{(1,2,-1,0),(0,2,1,0),(2,-1,3,0),(1,1,1,1)\}$ e
   $U' = \{(1,2,-1,0),(2,-1,3,0),(1,1,1,1)\}$

3. Mostre que o conjunto de vetores $\{(1,0,3,1),(-1,1,0,1),(2,3,0,0),(1,1,6,3)\}$ é linearmente dependente. Pode cada um dos vetores ser expresso como uma combinação linear dos restantes?

4. Discuta, em função de $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$, a independência linear dos seguintes conjuntos de vetores.

   a) $\{(1,-2),(\alpha,-1)\}$
   b) $\{(\alpha,1,1),(1,\alpha,1),(1,1,\alpha)\}$
   c) $\{0,\gamma,-\beta),(-\gamma,0,\alpha),(\beta,-\alpha,0)\}$.

5. Sejam $\{v_1, v_2, v_3\}$ um conjunto linearmente independente de vetores de $\mathbb{R}^n$ e $u_1 = v_1 + v_2$, $u_2 = v_1 + v_3$ e $u_3 = v_2 + v_3$. Justifique que $\{u_1, u_2, u_3\}$ é também linearmente independente.

Base e dimensão

Exercícios 17.

1. Indique quais dos seguintes conjuntos são bases de $\mathbb{R}^2$:

   a) $V = \{(1,-1),(3,0)\}$

   b) $U = \{(1,1),(0,2),(2,3)\}$

   c) $W = \{(1,1),(8,8)\}$.

2. Indique quais dos seguintes conjuntos são bases de $\mathbb{R}^3$.

   a) $V = \{(1,1,1),(0,2,3),(1,0,2)\}$

   b) $U = \{(1,0,1),(2,4,8)\}$

   c) $W = \{(3,0,1),(1,1,1),(4,1,2)\}$.

3. Considere em $\mathbb{R}^3$ os vetores $v_1 = (\alpha, 6, -1)$, $v_2 = (1, \alpha, -1)$ e $v_3 = (2, \alpha, -3)$, com $\alpha \in \mathbb{R}$.

   a) Determine α de modo que $\{v_1, v_2, v_3\}$ seja uma base de $\mathbb{R}^3$.

   b) Para um dos valores de α determinados em a), determine as componentes do vetor $(-1,1,2)$ em relação à base correspondente.

Exercício 18. Determine uma base e a dimensão do espaço nulo de cada uma das seguintes matrizes.

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & 4 & -1 & 5 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Exercício 19. Considere o subconjunto de $\mathbb{R}^4$,

$$V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 = x_2 - 3x_3,\ x_3 = 2x_4\}.$$

a) Mostre que V é subespaço vetorial.

b) Indique uma base de V.

Exercícios 20. Indique uma base para cada um dos seguintes conjuntos.

1. O plano de $\mathbb{R}^3$ definido por $2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0$.

2. O hiperplano de $\mathbb{R}^5$ definido por $3x_1 - 6x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 9x_5 = 0$.

Exercício 21. Determine uma base para o espaço das colunas de cada uma das matrizes do exercício 18.

Exercício 22.

1. Calcule $\dim S$, com $S =< \{(1,0,1),(1,-1,0),(3,-1,2)\} >$ e $S = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x - 2y + z - t = 0\}$.

2. Para que valores de α a dimensão do subspaço
$S =< \{(1,\alpha,-1),(-1,1,1),(\alpha,0,-1)\} >$ é 3?

Exercício 23. Determine uma base e a dimensão dos subespaços de $\mathbb{R}^4$ gerados pelos seguintes conjuntos de vetores.

a) $\{(1,0,2,3),(7,4,-2,1),(5,2,4,1),(3,2,0,1)\}$

b) $\{(1,3,2,-1),(2,0,-1,0),(1,1,1,1),(1,2,0,0),(5,6,2,0)\}$

Exercício 24. Seja V o espaço vetorial gerado pelo conjunto de vetores de $\mathbb{R}^3$

$$\{(1,0,5),(1,1,1),(0,3,1),(-3,0,-2)\}.$$

a) Mostre que $V = \mathbb{R}^3$.

b) Determine uma base de $\mathbb{R}^3$ contida no conjunto de vetores dado.

c) Escreva o vetor $(-2,3,4)$ como combinação linear dos vetores da base obtida em b).

Exercício 25. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [\, u_1 \,|\, u_2 \,|\, u_3 \,]$.

1. Para que valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ o vetor $(\alpha, \alpha^2, 2)$ é combinação de linear de u_1, u_2 e u_3?

2. Indique uma base para $\mathbb{R}^3$ que inclua os vetores u_1 e u_3.

Exercícios 26.

1. Seja A uma matriz do tipo $m \times n$. Para cada um dos casos considerados na tabela seguinte, determine as dimensões de $\mathscr{C}(A)$, $\mathscr{N}(A)$ e $\mathscr{N}(A^T)$.

	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	(g)
$m \times n$	3×3	3×3	3×3	5×9	9×5	4×4	6×2
car(A)	3	2	1	2	2	0	2

2. Seja A uma matriz quadrada de ordem 3, cujo espaço das colunas define um plano de $\mathbb{R}^3$ que passa na origem. Pode o espaço nulo de A determinar um plano que passa na origem? Justifique.

Exercícios 27.

1. Construa uma base de $\mathbb{R}^3$ que inclua o vetor $(1,1,1)$.

2. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 6 \end{bmatrix}$. Verifique que $v = (0,3,3,-1)$ pertence a $\mathscr{N}(A)$ e indique uma base de $\mathscr{N}(A)$ que inclua v.

3. Considere a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

   a) Resolva o sistema homogéneo $Ax = \vec{0}$ e indique a dimensão de $\mathscr{N}(A)$.

   b) Mostre que $\{(1,2,0,-1)$ e $(-1,3,1,-1)\}$ é uma base de $\mathscr{N}(A)$.

   c) Verifique que $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ é solução do sistema $Ax = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, e mostre que se u é um vetor do espaço nulo de A, entao $v + u$ é também solução do sistema.

4. Sejam $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ e $V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0,\ x_2 = x_3\}$

(a) Descreva $\mathcal{N}(A)$ analitica e geometricamente.

(b) Indique uma base e a dimensão de V.

(c) Mostre que $\mathcal{C}(A) = V$.

5. Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $S = \{x \in \mathbb{R}^3 : Ax = Bx\}$.

a) Mostre que S é um espaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

b) Indique uma base de S.

c) Determine um vetor não nulo do espaço nulo de A que pertença a S.

d) Mostre que se y é um vetor que pertence simultaneamente a S e ao espaço nulo de A, então y também pertence ao espaço nulo de B.

EXERCÍCIOS VARIADOS

Exercícios 28.

1. Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = [\, v_1 \,|\, v_2 \,|\, v_3 \,]$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ e $y = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}$.

(a) Descreva, analitica e geometricamente, $\mathcal{C}(A)$.

(b) Indique uma base e a dimensão de $\mathcal{C}(A)$.

(c) Mostre que o vetor y pertence a $\mathcal{C}(A)$ e escreva-o como combinação linear dos vetores da base de $\mathcal{C}(A)$ indicada em b).

(d) Indique um vetor de $\mathbb{R}^4$ que não pertença a $\mathcal{C}(A)$.

(e) Indique $\dim \mathcal{N}(A)$.

(f) Será $\{y, v_3\}$ uma base de $\mathcal{C}(A)$? Justifique.

(g) Classifique o sistema $Ax = \vec{0}$.

2. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$.

(a) Determine $\mathcal{N}(A)$ e interprete-o geometricamente.

(b) Indique uma base para $\mathcal{C}(A)$.

(c) Indique car(A).

(d) Mostre que $\mathcal{N}(A) = \langle (-1,1,0), (1,0,1) \rangle$.

3. Considere $V = \langle (1,1,0), (-1,1,1), (1,3,1) \rangle$.

   (a) Indique $\dim V$.

   (b) Mostre que $(2,4,1) \in V$.

   (c) Indique uma matriz A tal que $\mathscr{C}(A) = V$.

4. Considere os vetores $u = (1,2,1)$ e $v = (0,3,1)$.

   (a) Indique vetores w e z distintos de u e v tais que $\langle u, v \rangle = \langle w, z \rangle$.

   (b) Escreva uma matriz A quadrada de ordem 3 tal que $\mathscr{C}(A) = \langle u, v \rangle$.

   (c) Determine $\mathscr{N}(A)$.

5. Sejam $v_1 = (1,-1,1)$, $v_2 = (1,0,-1)$, $v_3 = (2,-1,0)$ e $v_4 = (1,1,0)$.

   (a) Será $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ linearmente independente?

   (b) Será que $\langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle = \mathbb{R}^3$?

   (c) Indique uma base para $\mathbb{R}^3$ constituída por vetores de $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.

6. Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

   a) Determine uma base de $\mathscr{N}(\mathscr{A})$.

   b) Determine uma solução do sistema $Ax = b$.

   c) Seja x_0 a solução obtida em b). Verifique que para todo o vetor $u \in \mathscr{N}(\mathscr{A})$, $x_0 + u$ é solução de $Ax = b$ e prove que não existem mais soluções para o sistema $Ax = b$.

   d) Interprete geometricamente o resultado obtido na alínea anterior.