

Capítulo 3

Ortogonalidade e Projeção Ortogonal

NORMA E DISTÂNCIA

Exercícios 29.

1. Calcule as normas e indique os versores dos seguintes vectores.

- (a) $(1, -1, 2)$
- (b) $(-1, 0, \pi, 0)$
- (c) $(5, 0, 1, 0, 1, 3)$

2. Calcule as distâncias entre os seguintes pares de vectores.

- (a) $(1, -1, 2)$ e $(0, -1, 0)$.
- (b) $(-1, 0, 2, 0)$ e $(1, 0, 0, 1)$.
- (c) $(5, 0, 1, 0, 1, 3)$ e $(-1, 2, 0, 1, 1, 0)$.

Exercício 30. Determine os vectores de norma $\sqrt{21}$ que são solução do sistema

linear $Ax = b$ com $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

ORTOGONALIDADE E COMPLEMENTO ORTOGONAL

Exercício 31. Considere $v_1 = (1, 0, 1)$ e $v_2 = (1, 1, -1)$.

- 1. Determine o conjunto dos vectores de $\mathbb{R}^3$ simultaneamente ortogonais a v_1 e v_2 .
- 2. Indique um vector unitário de $\mathbb{R}^3$ simultaneamente ortogonal a v_1 e v_2 .

Exercícios 32.

1. Justifique que $(2, 1, 1, -1)$ é ortogonal ao espaço gerado pelos vetores,

$$(1, 0, 0, 2), (-1, 0, 2, 0), (-1, 2, 0, 0), (1, 1, 1, 4).$$

2. Verifique que $(4, 2, -1)$ é ortogonal ao espaço das colunas da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Exercícios 33.

1. Determine os complementos ortogonais do espaço das colunas de cada uma das seguintes matrizes (no caso das alíneas a), b) e c) interprete ainda geometricamente o resultado obtido).

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} & \text{(b)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} & \text{(c)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \\ \text{(d)} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} & \text{(e)} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} & \end{array}$$

2. Determine os complementos ortogonais dos subespaços gerados pelos conjuntos de vetores $\{(1, 2, 2, 1), (1, 0, 2, 0)\}$ e $\{(1, 1, 2, -1)\}$.

3. Calcule a dimensão e indique uma base do complemento ortogonal de cada um dos seguintes subespaços gerados.

- (a) $\langle (1, 1) \rangle$.
(b) $\langle (1, 1, 3), (1, 1, 2), (0, 0, 1) \rangle$.
(c) $\langle (1, 1, 0, 0), (0, 2, 4, 5) \rangle$.
(d) $\langle (2, 2, 1, 0), (2, 4, 0, 1), (4, -2, 1, -1), (8, 4, 2, 0) \rangle$.

4. Para cada subespaço da alínea anterior indique uma base de $\mathbb{R}^n$, com n conveniente, que seja constituída por vetores desse subespaço e do seu complemento ortogonal.

PROJEÇÃO ORTOGONAL

Exercício 34. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e o vetor $b = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.
Justifique por definição que $\text{proj}_{\mathcal{C}(A)}(b) = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Exercícios 35.

1. Determine $\text{proj}_{\mathbb{R}^3}(a, b, c)$ e $\text{proj}_{\{\vec{0}\}}(a, b, c)$ para todo o $a, b, c \in \mathbb{R}$.
2. Considere o vetor $b = (1, 1, 2)$ e o subespaço vetorial $V = \langle (1, 0, 1), (0, 1, 1) \rangle$. Justifique que $b \in V$ e indique as projeções ortogonais de b sobre V e $V^\perp$.

Exercícios 36.

1. Determine a projeção ortogonal do vetor $(2, 3)$ sobre o vetor $(3, 1)$.
2. Determine as projeção ortogonais do vetor $(6, 5, 4)$ sobre a reta $\langle (1, -1, 3) \rangle$ e sobre o seu complemento ortogonal.

Exercício 37. Considere o vetor $b = (4, -1, 1)$ e os subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^3$,

$$U = \{(x, y, z) : x + y + z = 0\} \quad \text{e} \quad V = \langle (1, 0, 1), (0, 1, 1) \rangle.$$

1. Determine as projeções ortogonais de b sobre $U^\perp$, U , $V^\perp$ e V .
2. Calcule as distâncias de b a U e a V .
3. Identifique o vetor de V a menor distância do vetor b .

Exercícios 38.

1. Determine a projeção ortogonal do vetor $(0, 2, 5, -1)$ sobre o subespaço vetorial de $\mathbb{R}^4$ gerado pelos vetores $(1, 1, 0, 2)$ e $(-1, 0, 0, 1)$.
2. Considere o subespaço vetorial de $\mathbb{R}^4$,

$$U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0, x_2 - x_3 = 0\}$$

e o vetor $v = (2, 1, 0, 1)$. Determine as projeções ortogonais de v sobre U e sobre complemento ortogonal de U .

Exercício 39. Sejam $v_1 = (1, 0, 1, 0)$, $v_2 = (1, 1, 1, 1)$, $v_3 = (1, -1, 1, -1)$, $A = [v_1 \ v_2 \ v_3]$ e $b = (1, 2, 3, 4)$.

1. Calcule a projeção ortogonal de b sobre $\mathcal{C}(A)$ usando o método das equações normais.
2. Indique uma solução dos mínimos quadrados do sistema $Ax = b$. Será que essa solução corresponde a uma solução de $Ax = b$ no sentido usual?

MATRIZ DE PROJEÇÃO

Exercícios 40.

1. Considere o vetor $w = (1, -2, 2, 2)$ e o subespaço $V = \langle \{(1, 2, 0, 0), (1, 0, 1, 1)\} \rangle$.
 - (a) Determine a matriz de projeção P sobre o subespaço V .
 - (b) Utilizando a alínea anterior calcule a projeção de w sobre V .
2. Determine as matrizes de projeção ortogonal sobre o plano V de equação $x + 2y + 3z = 0$ e sobre $V^\perp$.
3. Sejam A uma matriz do tipo $m \times n$, com característica n e $P = A(A^\top A)^{-1}A^\top$ a matriz de projeção sobre $\mathcal{C}(A)$. Prove os seguintes resultados.
 - (a) $P^\top = P$ (P é simétrica).
 - (b) $P^2 = P$ (P é idempotente).

4. Justifique que $P = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ é a matriz de projeção sobre o subespaço vetorial $W = \{(x, y, z, t) : x = y, z = t\}$.

BASE ORTOGONAL E MÉTODO DE GRAM-SCHIMDT

Exercícios 41.

1. Considere $u = (1, -1, 0, 1)$, $v = (0, 1, 0, 1)$, $V = \langle u, v \rangle$ e $b = (2, -1, 0, 1)$.
 - (a) Justifique que $\{u, v\}$ é uma base ortogonal do subespaço V .
 - (b) Utilizando a alínea anterior determine a projeção ortogonal de b sobre V .
2. Considere os vetores de $\mathbb{R}^3$, $a = (1, -1, 1)$, $b = (-1, 1, 2)$ e $c = (1, 1, 0)$.
 - (a) Mostre que $\{a, b, c\}$ é uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$.
 - (b) Utilizando projeções ortogonais escreva $(0, 2, 4)$ como combinação linear de a , b e c .

Exercícios 42.

1.
 - (a) Utilizando o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt, determine uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ que inclua o vetor $(1, 0, 1)$.
 - (b) Transforme a base obtida na alínea anterior numa base ortonormal de $\mathbb{R}^3$.

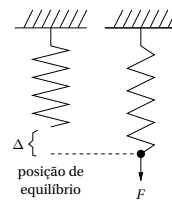
2. Seja $V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0\}$.
 - (a) Utilizando o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt determine uma base ortogonal de V .
 - (b) Utilizando a alínea anterior calcule a projeção ortogonal de $(2, 1, 0, 1)$ sobre V .
3. Considere $W = \langle (1, 1, 1, -1), (0, 1, 2, -1) \rangle$ e $b = (4, -1, 0, 3)$.
 - (a) Determine uma base e a dimensão de $W^\perp$.
 - (b) Calcule $\text{proj}_{W^\perp}(b)$.
 - (c) Calcule as distâncias de b a W e $W^\perp$.
 - (d) Indique uma base ortogonal de $\mathbb{R}^4$ que contenha uma base de W .
4. Determine uma base ortogonal de $\mathbb{R}^4$ que inclua uma base de cada um dos seguintes subespaços vetoriais
 - (a) $\langle (1, 0, 1, 0), (1, 1, 1, 1), (1, -1, 1, -1) \rangle$
 - (b) $\{(x, y, z, w) : x - y - z + w = 0, x + z = 0\}$

EXERCÍCIOS VARIADOS

Exercícios 43.

1. Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 6 & 2 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}$.
 - (a) Indique uma base e a dimensão de $\mathcal{C}(A)$.
 - (b) Descreva, analítica e geometricamente, $\mathcal{C}(A)$.
 - (c) Qual a dimensão de $\mathcal{N}(A)$?
 - (d) Calcule a projeção de b sobre $\mathcal{C}(A)$.
2. Considere $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y\}$
 - (a) Indique uma base e a dimensão de V .
 - (b) Determine o conjunto de todos os vetores ortogonais a V .
 - (c) Calcule a matriz de projeção sobre V .
3. Considere uma matriz $A_{3 \times 4}$ tal que $\{(2, 3, 1, 0)\}$ é uma base para $\mathcal{N}(A)$.
 - (a) Qual a característica de A ?
 - (b) Indique as soluções de $Ax = 0$.
 - (c) Escreva a matriz de projeção sobre $\mathcal{N}(A)$.

- (d) Calcule a distância de $b = (0, 2, 1, 0)$ a $\mathcal{N}(A)$.
4. Determine uma base ortogonal para cada um dos subespaços vetoriais
- (a) $\langle (1, 1, 1), (1, 0, -1), (0, 3, 1) \rangle$
- (b) $\langle (1, 0, 1, 0), (1, 1, 1, 1), (1, -1, 1, -1) \rangle$
- (c) $\{(x, y, z) : x + y = 0, y + z = 0\}$
- (d) $\{(x, y, z, w) : x - y - z + w = 0, x + z = 0\}$
5. Segundo a *lei de Hooke*, o deslocamento x de uma mola relativamente à sua posição de equilíbrio, é proporcional à força aplicada na mola, isto é, verifica uma relação do tipo $F = kx$ em que k é uma constante positiva designada por *constante elástica da mola* (esta lei é uma aproximação apenas válida para pequenas deformações da mola).



Foram efectuados diversos deslocamentos numa mola e registadas as forças que foram necessárias para produzir esses deslocamentos, assinaladas no seguinte quadro.

x_i (m)	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35
F_i (N)	2.1	3.9	5.7	8.2	10.5	11.7

Pretende-se estimar o valor da constante elástica da mola k que minimiza o erro E no sentido dos mínimos quadrados, isto é, que minimiza

$$E^2 = (F_1 - kx_1)^2 + \dots + (F_6 - kx_6)^2.$$

Interprete geometricamente o resultado obtido.