

Capítulo 3

Ortogonalidade e Projeção Ortogonal

NORMA E DISTÂNCIA

Exercícios 29.

1. Calcule as normas e indique os versores dos seguintes vectores.

(a) $(1, -1, 2)$

(b) $(-1, 0, \pi, 0)$

(c) $(5, 0, 1, 0, 1, 3)$

a) $\sqrt{6}$ e $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$ **b)** $\sqrt{1+\pi^2}$ e $\left(\frac{-1}{\sqrt{1+\pi^2}}, 0, \frac{\pi}{\sqrt{1+\pi^2}}, 0\right)$ **c)** 6 e $\left(\frac{5}{6}, 0, \frac{1}{6}, 0, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right)$

2. Calcule as distâncias entre os seguintes pares de vectores.

(a) $(1, -1, 2)$ e $(0, -1, 0)$.

(b) $(-1, 0, 2, 0)$ e $(1, 0, 0, 1)$.

(c) $(5, 0, 1, 0, 1, 3)$ e $(-1, 2, 0, 1, 1, 0)$.

a) $\sqrt{5}$ **b)** 3 **c)** $\sqrt{51}$

Exercício 30. Determine os vectores de norma $\sqrt{21}$ que são solução do sistema

linear $Ax = b$ com $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

$(0, 1, 2, 4)$ e $\left(-\frac{10}{3}, -\frac{7}{3}, 2, \frac{2}{3}\right)$

ORTOGONALIDADE E COMPLEMENTO ORTOGONAL

Exercício 31. Considere $v_1 = (1, 0, 1)$ e $v_2 = (1, 1, -1)$.

1. Determine o conjunto dos vectores de $\mathbb{R}^3$ simultaneamente ortogonais a v_1 e v_2 .
2. Indique um vetor unitário de $\mathbb{R}^3$ simultaneamente ortogonal a v_1 e v_2 .

a) $\{(-x_3, 2x_3, x_3) : x_3 \in \mathbb{R}\} = \langle(-1, 2, 1)\rangle$

b) $\text{vers}(-1, 2, 1) = \left(\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$, ou, em alternativa, $-\text{vers}(-1, 2, 1) = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}\right)$.

Exercícios 32.

1. Justifique que $(2, 1, 1, -1)$ é ortogonal ao espaço gerado pelos vetores,
 $(1, 0, 0, 2), (-1, 0, 2, 0), (-1, 2, 0, 0), (1, 1, 1, 4)$.
2. Verifique que $(4, 2, -1)$ é ortogonal ao espaço das colunas da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Exercícios 33.

1. Determine os complementos ortogonais do espaço das colunas de cada uma das seguintes matrizes (no caso das alíneas a), b) e c) interprete ainda geometricamente o resultado obtido).

(a) $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$

(a) $\{(x_1, x_2) : x_1 = 2x_2, x_2 \in \mathbb{R}\} = \langle(2, 1)\rangle$ que define a reta de $\mathbb{R}^2$ que passa na origem com vetor diretor $(2, 1)$ e é perpendicular à reta que passa na origem com vetor diretor $(1, -2)$, definida pelo espaço de colunas da matriz.

(b) $\{(x_1, x_2, x_3) : x_1 = -2x_3, x_2 = -\frac{3}{2}x_3, x_3 \in \mathbb{R}\} = \langle(-4, -3, 2)\rangle$ que define a reta de $\mathbb{R}^3$ que passa na origem com vetor diretor $(-4, -3, 2)$ e é perpendicular ao plano que passa na origem com vetores diretores $(1, 0, 2)$ e $(-1, 2, 1)$, definido pelo espaço de colunas da matriz.

(c) $(\mathbb{R}^3)^\perp = \{\vec{0}\}$ (o complemento ortogonal do subespaço maximal de $\mathbb{R}^3$ é o subespaço minimal de $\mathbb{R}^3$).

(d) $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 = -2x_2 - 3x_3 - 4x_4, x_2 \in \mathbb{R}, x_3 \in \mathbb{R}, x_4 \in \mathbb{R}\} = \langle (-2, 1, 0, 0), (-3, 0, 1, 0), (-4, 0, 0, 1) \rangle$ que define o hiperplano de $\mathbb{R}^4$.

(e) $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 = -3x_3 + 3x_4, x_2 = -2x_3 + 2x_4, x_3 \in \mathbb{R}, x_4 \in \mathbb{R}\} = \langle (-3, -2, 1, 0), (3, 2, 0, 1) \rangle$.

2. Determine os complementos ortogonais dos subespaços gerados pelos conjuntos de vetores $\{(1, 2, 2, 1), (1, 0, 2, 0)\}$ e $\{(1, 1, 2, -1)\}$.

$$\langle (1, 2, 2, 1), (1, 0, 2, 0) \rangle^\perp = \langle (-2, 0, 1, 0), (0, -1, 0, 2) \rangle$$

$$\langle (1, 1, 2, -1) \rangle^\perp = \langle (-1, 1, 0, 0), (-2, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1) \rangle.$$

3. Calcule a dimensão e indique uma base do complemento ortogonal de cada um dos seguintes subespaços gerados.

(a) $\langle (1, 1) \rangle$.

(b) $\langle (1, 1, 3), (1, 1, 2), (0, 0, 1) \rangle$.

(c) $\langle (1, 1, 0, 0), (0, 2, 4, 5) \rangle$.

(d) $\langle (2, 2, 1, 0), (2, 4, 0, 1), (4, -2, 1, -1), (8, 4, 2, 0) \rangle$.

(a) A dimensão é 1 e uma possível base é $\{(-1, 1)\}$.

(b) A dimensão é 1 e uma possível base é $\{(-1, 1, 0)\}$.

(c) A dimensão é 2 e uma possível base é $\{(2, -2, 1, 0), (5, -5, 0, 2)\}$.

(d) A dimensão é 1 e uma possível base é $\{(0, -1, 2, 4)\}$.

4. Para cada subespaço da alínea anterior indique uma base de $\mathbb{R}^n$, com n conveniente, que seja constituída por vetores desse subespaço e do seu complemento ortogonal.

a) Uma possível base de $\mathbb{R}^2$ é $\{(1, 1), (-1, 1)\}$,

b) Uma possível base de $\mathbb{R}^3$ é $\{(1, 1, 3), (1, 1, 2), (-1, 1, 0)\}$,

c) Uma possível base de $\mathbb{R}^4$ é $\{(1, 1, 0, 0), (0, 2, 4, 5), (2, -2, 1, 0), (5, -5, 0, 2)\}$,

c) Uma possível base de $\mathbb{R}^4$ é $\{(2, 2, 1, 0), (2, 4, 0, 1), (4, -2, 1, -1), (0, -1, 2, 4)\}$.

PROJEÇÃO ORTOGONAL

Exercício 34. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e o vetor $b = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Justifique por definição que $\text{proj}_{\mathcal{C}(A)}(b) = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Exercícios 35.

1. Determine $\text{proj}_{\mathbb{R}^3}(a, b, c)$ e $\text{proj}_{\{\vec{0}\}}(a, b, c)$ para todo o $a, b, c \in \mathbb{R}$.
 $\text{proj}_{\mathbb{R}^3}(a, b, c) = (a, b, c)$ e $\text{proj}_{\{\vec{0}\}}(a, b, c) = (0, 0, 0) \forall a, b, c \in \mathbb{R}$.
2. Considere o vetor $b = (1, 1, 2)$ e o subespaço vetorial $V = \langle (1, 0, 1), (0, 1, 1) \rangle$. Justifique que $b \in V$ e indique as projeções ortogonais de b sobre V e $V^\perp$.
 $\text{proj}_V(b) = b$ e $\text{proj}_{V^\perp}(b) = \vec{0}$.

Exercícios 36.

1. Determine a projeção ortogonal do vetor $(2, 3)$ sobre o vetor $(3, 1)$.
 $\text{proj}_{(3,1)}((2, 3)) = \left(\frac{27}{10}, \frac{9}{10}\right)$.
2. Determine as projeção ortogonais do vetor $(6, 5, 4)$ sobre a reta $\langle (1, -1, 3) \rangle$ e sobre o seu complemento ortogonal.
 $\text{proj}_{\langle(1,-1,3)\rangle}((6, 5, 4)) = \left(\frac{13}{11}, -\frac{13}{11}, \frac{39}{11}\right)$ e $\text{proj}_{\langle(1,-1,3)\rangle^\perp}((6, 5, 4)) = \left(\frac{53}{11}, \frac{68}{11}, \frac{5}{11}\right)$.

Exercício 37. Considere o vetor $b = (4, -1, 1)$ e os subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^3$,

$$U = \{(x, y, z) : x + y + z = 0\} \quad \text{e} \quad V = \langle (1, 0, 1), (0, 1, 1) \rangle.$$

1. Determine as projeções ortogonais de b sobre $U^\perp$, U , $V^\perp$ e V .
 $\text{proj}_{U^\perp}(b) = \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$.
 $\text{proj}_U(b) = \left(\frac{8}{3}, -\frac{7}{3}, -\frac{1}{3}\right)$.
 $\text{proj}_{V^\perp}(b) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$.
 $\text{proj}_V(b) = \left(\frac{10}{3}, -\frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right)$.
2. Calcule as distâncias de b a U e a V .
 $d(b, U) = \|\text{proj}_{U^\perp}(b)\| = \left\|\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)\right\| = \left|\frac{4}{3}\right| \|(1, 1, 1)\| = \frac{4}{3}\sqrt{3}$.
 $d(b, V) = \frac{2}{3}\sqrt{3}$.
3. Identifique o vetor de V a menor distância do vetor b .
O vetor de V a menor distância de b é $\text{proj}_V(b) = \left(\frac{10}{3}, -\frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right)$.

Exercícios 38.

1. Determine a projeção ortogonal do vetor $(0, 2, 5, -1)$ sobre o subespaço vetorial de $\mathbb{R}^4$ gerado pelos vetores $(1, 1, 0, 2)$ e $(-1, 0, 0, 1)$.
 $\text{proj}_{\langle(1,1,0,2),(-1,0,0,1)\rangle}((0, 2, 5, -1)) = \left(\frac{7}{11}, \frac{1}{11}, 0, -\frac{4}{11}\right)$.
2. Considere o subespaço vetorial de $\mathbb{R}^4$,
$$U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0, x_2 - x_3 = 0\}$$
e o vetor $v = (2, 1, 0, 1)$. Determine as projeções ortogonais de v sobre U e sobre complemento ortogonal de U .
 $\text{proj}_U((2, 1, 0, 1)) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, $\text{proj}_{U^\perp}((2, 1, 0, 1)) = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

Exercício 39. Sejam $v_1 = (1, 0, 1, 0)$, $v_2 = (1, 1, 1, 1)$, $v_3 = (1, -1, 1, -1)$, $A = [v_1 \ v_2 \ v_3]$ e $b = (1, 2, 3, 4)$.

1. Calcule a projeção ortogonal de b sobre $\mathcal{C}(A)$ usando o método das equações normais.

$$(2, 3, 2, 3) = A\bar{x}, \text{ com } \bar{x} = (-1, 3, 0).$$

2. Indique uma solução dos mínimos quadrados do sistema $Ax = b$. Será que essa solução corresponde a uma solução de $Ax = b$ no sentido usual?

Uma possível solução dos mínimos quadrados, isto é, do sistema $Ax = \text{proj}_{\mathcal{C}(A)}(b)$, é $\bar{x} = (-1, 3, 0)$, que não corresponde a uma solução de $Ax = b$ no sentido usual pois $A\bar{x} \neq b$. De facto, tem-se $A\bar{x} = \text{proj}_{\mathcal{C}(A)}(b) \neq b$, uma vez que $b \notin \mathcal{C}(A)$ (verifique).

MATRIZ DE PROJEÇÃO

Exercícios 40.

1. Considere o vetor $w = (1, -2, 2, 2)$ e o subespaço $V = \langle \{(1, 2, 0, 0), (1, 0, 1, 1)\} \rangle$.

- (a) Determine a matriz de projeção P sobre o subespaço V .

$$P = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 6 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 12 & -2 & -2 \\ 4 & -2 & 5 & 5 \\ 4 & -2 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

- (b) Utilizando a alínea anterior calcule a projeção de w sobre V .

$$\text{proj}_V(w) = Pw = (1, -2, 2, 2).$$

2. Determine as matrizes de projeção ortogonal sobre o plano V de equação $x + 2y + 3z = 0$ e sobre $V^\perp$.

A matriz de projeção sobre $V^\perp$ é $Q = \frac{uu^T}{u^T u} = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$ onde $u = (1, 2, 3)$ é

o vetor normal a V .

A matriz de projeção sobre V é $P = I_3 - Q = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 13 & -2 & -3 \\ -2 & 10 & -6 \\ -3 & -6 & 5 \end{bmatrix}$.

3. Sejam A uma matriz do tipo $m \times n$, com característica n e $P = A(A^T A)^{-1} A^T$ a matriz de projeção sobre $\mathcal{C}(A)$. Prove os seguintes resultados.

- (a) $P^T = P$ (P é simétrica).

- (b) $P^2 = P$ (P é idempotente).

-
4. Justifique que $P = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ é a matriz de projeção sobre o subespaço vetorial $W = \{(x, y, z, t) : x = y, z = t\}$.

BASE ORTOGONAL E MÉTODO DE GRAM-SCHIMDT

Exercícios 41.

- Considere $u = (1, -1, 0, 1)$, $v = (0, 1, 0, 1)$, $V = \langle u, v \rangle$ e $b = (2, -1, 0, 1)$.
 - Justifique que $\{u, v\}$ é uma base ortogonal do subespaço V .
 - Utilizando a alínea anterior determine a projeção ortogonal de b sobre V .
 $\text{proj}_{\langle u, v \rangle}(b) = \left(\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, 0, \frac{4}{3}\right)$.
- Considere os vetores de $\mathbb{R}^3$, $a = (1, -1, 1)$, $b = (-1, 1, 2)$ e $c = (1, 1, 0)$.
 - Mostre que $\{a, b, c\}$ é uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$.
 - Utilizando projeções ortogonais escreva $(0, 2, 4)$ como combinação linear de a , b e c .
 $(0, 2, 4) = \text{proj}_{\mathbb{R}^3}(0, 2, 4) = \dots = \frac{2}{3}a + \frac{5}{3}b + c$.

Exercícios 42.

- Utilizando o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt, determine uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ que inclua o vetor $(1, 0, 1)$.
 Uma possível base ortogonal é $\{(1, 0, 1), (1, 0, -1), (0, 1, 0)\}$.
 - Transforme a base obtida na alínea anterior numa base ortonormal de $\mathbb{R}^3$.
 Tomando os versores dos vetores da base anterior obtém-se a b.o.n.,
 $\left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right), (0, 1, 0) \right\}$.
- Seja $V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0\}$.
 - Utilizando o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt determine uma base ortogonal de V .
 Uma possível base ortogonal é $\{(-1, 1, 0, 0), (1, 1, 2, 0), (-1, -1, 1, 3)\}$.
 - Utilizando a alínea anterior calcule a projeção ortogonal de $(2, 1, 0, 1)$ sobre V .
 $\text{proj}_V(b) = (1, 0, 1, 0)$.

3. Considere $W = \langle (1, 1, 1, -1), (0, 1, 2, -1) \rangle$ e $b = (4, -1, 0, 3)$.
- (a) Determine uma base e a dimensão de $W^\perp$.
Uma possível base é $\{(1, -2, 1, 0), (0, 1, 0, 1)\}$ e a dimensão é 2.
 - (b) Calcule $\text{proj}_{W^\perp}(b)$.
 $\text{proj}_{W^\perp}(b) = (2, -1, 2, 3)$.
 - (c) Calcule as distâncias de b a W e $W^\perp$.
 $d(b, W) = \sqrt{18}$, $d(b, W^\perp) = \sqrt{8}$.
 - (d) Indique uma base ortogonal de $\mathbb{R}^4$ que contenha uma base de W .
Uma possível base ortogonal é $\{(1, 1, 1, -1), (-1, 0, 1, 0), (1, -2, 1, 0), (1, 1, 1, 3)\}$.
4. Determine uma base ortogonal de $\mathbb{R}^4$ que inclua uma base de cada um dos seguintes subespaços vetoriais
- (a) $\langle (1, 0, 1, 0), (1, 1, 1, 1), (1, -1, 1, -1) \rangle$
Uma possível base ortogonal é $\{(1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1), (-1, 0, 1, 0), (0, -1, 0, 1)\}$.
 - (b) $\{(x, y, z, w) : x - y - z + w = 0, x + z = 0\}$
Uma possível base ortogonal é $\{(-1, -2, 1, 0), (-1, 1, 1, 3), (1, 0, 1, 0), (1, -1, -1, 1)\}$.

EXERCÍCIOS VARIADOS

Exercícios 43.

1. Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 6 & 2 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}$.
- (a) Indique uma base e a dimensão de $\mathcal{C}(A)$.
Uma possível base é $\{(1, 0, -2), (0, 1, 6), (2, -1, 2)\}$ e dimensão é 3.
 - (b) Descreva, analítica e geometricamente, $\mathcal{C}(A)$.
 $\mathbb{R}^3$
 - (c) Qual a dimensão de $\mathcal{N}(A)$?
 $\dim \mathcal{N}(A) = 0$.
 - (d) Calcule a projeção de b sobre $\mathcal{C}(A)$.
 $\text{proj}_{\mathcal{C}(A)}(b) = \text{proj}_{\mathbb{R}^3}(b) = b$.
2. Considere $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y\}$
- (a) Indique uma base e a dimensão de V .
Uma possível base é $\{(1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ e a dimensão é 2.

- (b) Determine o conjunto de todos os vetores ortogonais a V .

$V^\perp = \langle (1, -1, 0) \rangle$ que representa uma reta de $\mathbb{R}^3$ que passa na origem com a direção do vetor $(1, -1, 0)$.

- (c) Calcule a matriz de projeção sobre V .

$$P = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

3. Considere uma matriz $A_{3 \times 4}$ tal que $\{(2, 3, 1, 0)\}$ é uma base para $\mathcal{N}(A)$.

- (a) Qual a característica de A ?

$\text{car}(A) = 3$.

- (b) Indique as soluções de $Ax = 0$.

$\mathcal{N}(A) = \langle (2, 3, 1, 0) \rangle$.

- (c) Escreva a matriz de projeção sobre $\mathcal{N}(A)$.

$$P = \frac{vv^T}{v^T v} = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 4 & 6 & 2 & 0 \\ 6 & 9 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ em que } v = (2, 3, 1, 0).$$

- (d) Calcule a distância de $b = (0, 2, 1, 0)$ a $\mathcal{N}(A)$.

$$\|(-1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)\| = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

4. Determine uma base ortogonal para cada um dos subespaços vetoriais

- (a) $\langle (1, 1, 1), (1, 0, -1), (0, 3, 1) \rangle$

Uma possível base ortogonal é $\{(1, 1, 1), (1, 0, -1), (-1, 2, -1)\}$.

- (b) $\langle (1, 0, 1, 0), (1, 1, 1, 1), (1, -1, 1, -1) \rangle$

Uma possível base ortogonal é $\{(1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1)\}$.

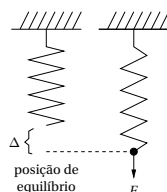
- (c) $\{(x, y, z) : x + y = 0, y + z = 0\}$

Uma possível base ortogonal é $\{(1, -1, 1)\}$.

- (d) $\{(x, y, z, w) : x - y - z + w = 0, x + z = 0\}$

Uma possível base ortogonal é $\{(-1, -2, 1, 0), (-1, 1, 1, 3)\}$.

5. Segundo a *lei de Hooke*, o deslocamento x de uma mola relativamente à sua posição de equilíbrio, é proporcional à força aplicada na mola, isto é, verifica uma relação do tipo $F = kx$ em que k é uma constante positiva designada por *constante elástica da mola* (esta lei é uma aproximação apenas válida para pequenas deformações da mola).



Foram efectuados diversos deslocamentos numa mola e registadas as forças que foram necessárias para produzir esses deslocamentos, assinaladas no seguinte quadro.

x_i (m)	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35
F_i (N)	2.1	3.9	5.7	8.2	10.5	11.7

Pretende-se estimar o valor da constante elástica da mola k que minimiza o erro E no sentido dos mínimos quadrados, isto é, que minimiza

$$E^2 = (F_1 - kx_1)^2 + \dots + (F_6 - kx_6)^2.$$

Interprete geometricamente o resultado obtido.

A constante k é a solução no **sentido dos mínimos quadrados** do sistema sobredeterminado a 6 equações e uma variável k , $xk = F$, isto é, a solução no **sentido usual** do sistema $xk = \text{proj}_x(F)$. Uma vez que $\text{proj}_x(F) = \frac{F^T x}{x^T x} x$ com

$$x = (0.1, 0.15, 0.2, 0.25, 0.3, 0.35), \quad \text{e} \quad F = (2.1, 3.9, 5.7, 8.2, 10.5, 11.7),$$

obtém-se o valor aproximado da constante elástica, $k = \frac{F^T x}{x^T x} = 32.31655$.