

INSTITUTO SUPERIOR DE AGRONOMIA

1º teste de Álgebra Linear

27 de outubro de 2025 - Duração: 2h

Guarde **todos os equipamentos eletrônicos**, incluindo telemóveis, calculadoras e *smartwatches* na mala/mochila fechada ou coloque-os na secretária do docente.
Não é permitido escrever no enunciado para além do preenchimento do nome e do número de aluno e da resposta à questão 3., que deve ser assinalada na tabela.
O incumprimento das regras anteriores leva à **anulação da prova**.

Apresente os cálculos que efetuar e justifique todas as respostas
(com exceção da questão 3.)

Número:

Nome:

Cotação (não preencher)

1a)	1b)	1c)i	1c)ii	1d)i	1d)ii	2	3	4a)	4b)	5	Total
3	1	2	1.25	1.75	2.25	1	2.25	2.5	1	2	20

Os dados relativos às questões 1. e 4. encontram-se abaixo. No início da resolução destas duas questões, comece por copiar os dados que dizem respeito à questão para o caderno de teste.

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -\alpha & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \end{bmatrix} = [v_1 \ v_2 \ v_3]$ e $b = (1, 0, \beta)$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

4. $V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 = x_2 + x_4, \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$

[11.25v]

1. (a) Discuta o sistema $Ax = b$ para todos os valores de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Se $\alpha \neq 0, 1$, o sistema é PD para todo o β .

Se $\alpha = 0$, o sistema é PI para todo o β .

Se $\alpha = 1$, o sistema é PI para $\beta = 1$ e IMP para $\beta \neq 1$.

- (b) Indique os valores de α para os quais $(2, 2, -2) \in \mathcal{N}(A)$.

$$u = (2, 2, -2) \in \mathcal{N}(A) \Leftrightarrow Au = \vec{0} \Leftrightarrow \alpha = 1.$$

- (c) Considere $\alpha = 2$.

- i. Calcule a inversa de A .

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{2} & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

- ii. Escreva $(1, 2, 5)$ como combinação linear de v_1, v_2 e v_3 .

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = -2v_1 - v_2 + 3v_3.$$

- (d) Considere $\alpha = 1$.

- i. Determine $\mathcal{C}(A)$ e interprete-o geometricamente.

$\mathcal{C}(A) = \{(b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3 : b_3 - b_2 - b_1 = 0\} = \langle (1, -1, 0), (0, 1, 1) \rangle$, que define o plano de $\mathbb{R}^3$ que passa na origem, com vetores diretores $v_1 = (1, -1, 0)$ e $v_2 = (0, 1, 1)$ e vetor normal $(-1, -1, 1)$.

- ii. Justifique que $\{(1, 4, 5), (-4, 5, 1)\}$ é uma base de $\mathcal{C}(A)$.

Aplicar o 2º teorema do slide 139 considerando $V = \mathcal{C}(A)$.

[1v]

2. Seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma transformação linear definida por $T(x, y, z) = (x + y - 2z, 2x + z)$. Determine a matriz canônica da transformação T .

$$\text{É a matriz } [T(e_1) \ T(e_2) \ T(e_3)] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

[2.25v]

3. A tabela seguinte contém alguns conjuntos de vetores de $\mathbb{R}^3$ e propriedades que estes conjuntos podem verificar ou não. Para cada conjunto de vetores de $\mathbb{R}^3$ e cada uma das propriedades, assinale com S (Sim) ou N (Não) consoante o conjunto verifique ou não a propriedade (não justifique a resposta):

	Linearmente independente	Gera $\mathbb{R}^3$	Base de $\mathbb{R}^3$
$\{(1, -1, 0), (1, 2, 1), (2, 1, 1)\}$	N	N	N
$\{(2, 0, 0), (3, 1, 0), (4, 1, 2)\}$	S	S	S
$\{(2, 0, 0), (3, 1, 0), (4, 1, 2), (-5, 6, -1)\}$	N	S	N

[3.5v]

4. (a) Determine uma base e a dimensão de V .

Uma base de V é $\{w_1, w_2\} = \{(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 0), (0, -1, 0, 1)\}$
 $\dim V = 2$ (número de vetores da base).

- (b) Escreva V como espaço gerado por 3 vetores não nulos de $\mathbb{R}^4$.

Por exemplo, $V = \langle w_1, w_2, w_1 + w_2 \rangle = \langle (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 0), (0, -1, 0, 1), (-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 1, 1) \rangle$.

[2v]

5. Seja A uma matriz do tipo $m \times n$ tal que $\text{car}(A) = n$ e sejam $x, y \in \mathbb{R}^n$ tais que $Ax = Ay$.
Prove que $x = y$.

Como $\text{car}(A)$ é igual ao número de colunas de A , o sistema linear homogêneo com matriz ampliada $[A | \vec{0}]$ é determinado e tem como solução **única** a solução trivial $u = \vec{0}$.

Como $Ax = Ay$ tem-se $A(x - y) = \vec{0}$ e portanto $x - y$ é solução do sistema homogêneo $[A | \vec{0}]$.

Logo $x - y = u = \vec{0}$, isto é, $x = y$.