Conceitos de vetor e valor próprio de uma matriz

Vamos agora introduzir um conceito fundamental em Álgebra Linear que "explora" as direções invariantes associadas às matrizes.

Vetor próprio e valor próprio de uma matriz

Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Um vetor $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq \vec{0}$, diz-se um vetor próprio de A se existir um escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\boxed{Av = \lambda\, v.}$$

E o escalar λ diz-se o correspondente valor próprio de A.

Exemplo retirado do 2º teste de 8 de janeiro de 2024

Considerando $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ e $v = (-1, 0, 2)$ tem-se

$$A\, v = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = 2\, v,$$

o que mostra que v é vetor próprio de A associado ao valor próprio $\lambda = 2$.

Outros vetores próprios de A associados ao valor próprio 2?

- O vetor próprio $v = (-1, 0, 2)$ associado ao valor próprio $\lambda = 2$ não é único. Por exemplo, se considerarmos $u = -v = (1, 0, -2)$ tem-se

$$Au = A(-v) = -Av = -2v = 2(-v) = 2u,$$

o que mostra que u é também vetor próprio de A associado ao mesmo valor próprio $\lambda = 2$.

- Como determinar todos os vetores próprios associados ao valor próprio $\lambda = 2$?
- Para respondermos a este tipo de questões vamos introduzir no próximo slide o conceito de subespaço próprio...

Exercício

Mostre que mais geralmente todos os múltiplos não nulos de $v = (-1, 0, 2)$ ainda são vetores próprios de A.

Subespaço próprio e multiplicidade geométrica

Conceitos de subespaço próprio e multiplicidade geométrica

Sejam A matriz quadrada de ordem n e $\lambda \in \mathbb{R}$ um valor próprio de A. Chama-se subespaço próprio de A associado a λ ao subespaço vetorial,

$$E(\lambda) = \mathcal{N}(A - \lambda I).$$

A dimensão de $E(\lambda)$ designa-se por multiplicidade geométrica de λ (m.g.(λ)), isto é, m.g.$(\lambda) = \dim E(\lambda)$.

Têm-se as equivalências,

$$\begin{aligned} Av = \lambda v \quad &\Leftrightarrow \quad Av - \lambda v = \vec{0} \;\Leftrightarrow\; (A - \lambda I)v = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow \quad v \in E(\lambda) = \mathcal{N}(A - \lambda I), \end{aligned}$$

que provam o seguinte resultado.

Teorema

Os vetores próprios de A associados a um valor próprio λ de A são os vetores <u>não nulos</u> do subespaço próprio $E(\lambda) = \mathcal{N}(A - \lambda I)$.

Vetores próprios associados a $\lambda = 2$ da matriz do slide 230

Vimos no slide 230 que $\lambda = 2$ era um valor próprio de $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Vamos calcular o respetivo subespaço próprio $E(2) = \mathcal{N}(A - 2I)$. Tem-se:

- $A - 2I = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.
- Aplicando o método de Gauss à matriz ampliada $\left[\, A - 2I \mid \vec{0} \,\right]$ obtém-se,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \cdots \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \dashrightarrow \begin{cases} x_1 \quad + \frac{1}{2}x_3 = 0 \\ \quad x_2 \quad\quad = 0 \\ (x_3 \in \mathbb{R}) \end{cases}$$

- Logo, $E(2) = \mathcal{N}(A - 2I) = \left\{ \left(-\frac{1}{2}x_3, 0, x_3\right) : x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \left(-\frac{1}{2}, 0, 1\right) \right\rangle$, cuja base é $\left\{ \left(-\frac{1}{2}, 0, 1\right) \right\}$, e m.g.$(2) = \dim E(2) = 1$ (número de vetores da base).
- Geometricamente $E(2)$ é a reta que passa na origem com direção $(-\frac{1}{2}, 0, 1)$. Os vetores próprios de A associados ao valor próprio $\lambda = 2$ correspondem aos vetores não nulos da reta $E(2)$, isto é, aos vetores da forma $\left(-\frac{1}{2}x_3, 0, x_3\right)$ com $x_3 \neq 0$. Por exemplo, considerando $x_3 = 2$ conclui-se novamente que $(-1, 0, 2)$ é um vetor próprio de A associado ao valor próprio $\lambda = 2$ (cf. slide 230).

Como determinar todos os valores próprios de uma matriz?

Observação

Seja A é uma matriz quadrada de ordem n. Tem-se:

$$
\begin{aligned}
\lambda \in \mathbb{R} \text{ é valor próprio de } A \quad &\Leftrightarrow \quad \text{existe um vetor próprio } v \neq \vec{0} \\
& \quad \text{associado ao valor próprio } \lambda \\
&\Leftrightarrow \quad \text{existe } v \neq \vec{0} \text{ tal que } Av = \lambda v \\
&\Leftrightarrow \quad \text{existe } v \neq \vec{0} \text{ tal que } (A - \lambda I)v = \vec{0} \\
&\Leftrightarrow \quad \mathcal{N}(A - \lambda I) \neq \{\vec{0}\} \\
&\Leftrightarrow \quad \dim \mathcal{N}(A - \lambda I) \neq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \text{car}(A - \lambda I) \neq n \\
&\Leftrightarrow \quad (A - \lambda I) \text{ não é invertível.}
\end{aligned}
$$

- Concluímos assim que os valores próprios de A correspondem aos valores do "parâmetro" λ para os quais a matriz $(A - \lambda I)$ é singular.
- Para calcular esses valores vamos associar a cada matriz quadrada A um número real denotado $\det(A)$ e designado determinante de A que toma o valor zero se e só se A for não invertível...

Motivação e determinante de matrizes de ordens ≤ 2

Motivação : associar a cada matriz $A_{n\times n}$ um número real $\det(A)$, designado determinante de A, tal que

$$\boxed{A \text{ é invertível} \quad \Leftrightarrow \quad \det(A) \neq 0}$$

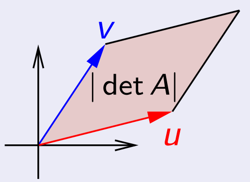
- Se $n = 1$, define-se,

$$\det [a] = a.$$

- Se $n = 2$, define-se,

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc.$$

Interpretação geométrica do determinante de matrizes 2×2



O valor absoluto do determinante de uma matriz

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = [\, u \quad v \,], \text{ com } u = (a, c) \text{ e } v = (b, d),$$

corresponde à área do paralelogramo definido por u e v. Esta área é não nula se e só se u e v são não colineares, isto é, $\text{car}(A) = 2$, ou seja, A é invertível!

Determinante de matrizes de ordem 2 - exemplo

Por exemplo, o determinante da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ é,

$$\det(A) = \begin{bmatrix} 1 & & 2 \\ & & \\ 3 & & 4 \end{bmatrix} = 1 \times 4 - 2 \times 3 = -2 \neq 0.$$

Logo A é invertível ($\det(A) \neq 0$) e o paralelogramo definido pelos vetores $u = (1, 3)$ e $v = (2, 4)$ tem área 2.

Determinante de matrizes 3×3: regra de Sarrus

- Se $n = 3$, define-se o determinante de A usando o esquema abaixo em que repetimos as 2 primeiras colunas de A:

$$\det(A) = \det \left[\begin{array}{ccc} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{array}\right] \begin{array}{cc} a & b \\ d & e \\ g & h \end{array}$$

$$= \color{red}{aei + bfg + cdh} - \left[\color{blue}{ceg + afh + bdi}\right].$$

Por exemplo,

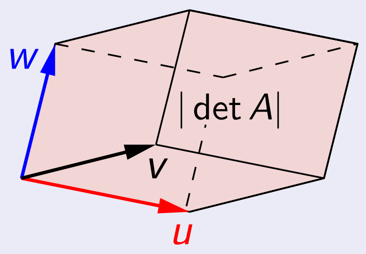
$$\det(A) = \det \left[\begin{array}{rrr} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{rr} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{array} = \color{red}{1 \times 1 \times 1 + 0 \times 1 \times (-1) + (-2) \times 2 \times 3}$$

$$- \left[\color{blue}{(-2) \times 1 \times (-1) + 1 \times 1 \times 3 + 0 \times 2 \times 1}\right] = \color{red}{1 + 0 - 12} - \left[\color{blue}{2 + 3 + 0}\right] = -16.$$

Em particular, A é invertível pois $\det(A) \neq 0$.

Determinantes 3x3

Interpretação geométrica do determinante de matrizes 3×3



O valor absoluto do determinante de uma matriz $A = [\, u \quad v \quad w \,]_{3\times 3}$ com $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ corresponde ao volume do paralelipípedo definido por u, v e w. Este volume é não nulo se e só se o paralelipípedo for não degenerado, ou seja, u, v, w forem não complanares, ou seja, $\mathrm{car}(A) = 3$, isto é, A invertível.

- Por exemplo, o paralelipípedo definido pelas 3 colunas da matriz A do slide anterior, $u = (1, 2, -1)$, $\mathbf{v} = (\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{3})$ e $w = (-2, 1, 1)$, tem volume 16.
- A regra de Sarrus só se aplica a matrizes 3x3. Para calcular determinantes de matrizes de ordem arbitrária pode-se usar a chamada regra de Laplace.
- Vamos ver em seguida como aplicar o determinante para calcular valores próprios de uma matriz. . .

De volta aos valores e vetores próprios...

Polinómio característico de uma matriz

Se A é uma matriz quadrada de ordem n e λ uma variável então a expressão $\det(A - \lambda I)$ define um polinómio de grau n na variável λ, que se designa por polinómio característico de A e se denota $p_A(\lambda)$.

Da observação do slide 234 conclui-se imediatamente o seguinte.

Teorema

Tem-se que $\alpha \in \mathbb{R}$ (ou mais geralmente $\alpha \in \mathbb{C}$) é valor próprio de uma matriz quadrada A se e só se $p_A(\alpha) = \det(A - \alpha I) = 0$, isto é, se e só se α for uma raíz do polinómio característico $p_A(\lambda)$.

As raízes de $p_A(\lambda)$ podem ser reais ou complexas e estarem repetidas!

Multiplicidade algébrica de um valor próprio

Chama-se multiplicidade algébrica de um valor próprio α, denotada m.a.(α), ao número de vezes que α aparece repetido como raíz na factorização de $p_A(\lambda)$.

Valores próprios e polinómio característico - exemplos

- Verificar que $\alpha \in \mathbb{R}$ (ou $\alpha \in \mathbb{C}$) é valor próprio de A $\rightarrow$ mostrar que $p_A(\alpha) = 0$.

Por exemplo, vejamos que $\alpha = 3$ é valor próprio de $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$:

$$\begin{aligned} p_A(3) = \det(A - 3I_3) &= \det\left(\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}\right) \\ &= \det\begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{verifique}). \end{aligned}$$

- Determinar os valores próprios de A $\rightarrow$ determinar as raízes de $p_A(\lambda)$.

Por exemplo, se $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$, obtém-se calculando o polinómio característico de A, $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$, pela fórmula do slide 235,

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I) = \det\begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -4 & 5-\lambda \end{bmatrix} \\ &= (1-\lambda) \times (5-\lambda) - 1 \times (-4) = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda - 3)^2. \end{aligned}$$

Logo $p_A(\lambda)$ apenas admite a raíz dupla $\lambda = 3$ e portanto A tem como único valor próprio $\lambda = 3$, com multiplicidade algébrica 2 (m.a.(3)=2).

Valores próprios e respetivas m.a. da matriz do slide 230

Consideremos novamente a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Vamos calcular os valores próprios de A e as respetivas multiplicidades algébricas.

- Aplicando no cálculo do determinante a regra de Sarrus do slide 237 obtém-se,

$$\begin{aligned}
p_A(\lambda) &= \det(A-\lambda I) = \det\left(\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & & \\ & \lambda & \\ & & \lambda \end{bmatrix}\right) \\
&= \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ 2 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{bmatrix} \begin{matrix} 2-\lambda & -1 \\ 2 & -\lambda \\ 0 & 1 \end{matrix} \\
&= (2-\lambda)(-\lambda)(2-\lambda) + \cancel{(-1)\times 1 \times 0} + \cancel{0 \times 2 \times 1} \\
&\quad -\left[\cancel{0 \times (-\lambda) \times 0} + (2-\lambda) \times 1 \times \times 1 + (-1) \times 2 \times (2-\lambda)\right] \\
&= (2-\lambda)(-\lambda)(2-\lambda) + (2-\lambda) = (2-\lambda)((-\lambda)(2-\lambda)+1) \\
&= (2-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = (2-\lambda)(\lambda-1)^2.
\end{aligned}$$

- Logo $p_A(\lambda)$ admite a raíz **dupla** $\lambda = 1$, uma vez que aparece repetida 2 vezes na factorização do polinómio e a raíz **simples** $\lambda = 2$.
- Portanto A admite os valores próprios distintos, $\lambda = 1, 2$, tendo-se m.a.$(1) = 2$ e m.a.$(2) = 1$.

Subespaços próprios e resp. m.g. do exemplo anterior

Vamos agora calcular os subespaços próprios associados aos 2 valores próprios de A, $\lambda = 1$ e $\lambda = 2$. Já vimos no slide 233 que $E(2) = \langle(-\frac{1}{2}, 0, 1)\rangle$ tendo-se $\text{m.g.}(2) = 1$.

Vamos calcular o subespaço próprio $E(1) = \mathcal{N}(A - 1\, I)$ e a resp. m.g.(1):

- $A - 1\, I = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ obtendo-se,

$$\left[\, A - I \mid \vec{0}\, \right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \cdots \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

  Logo

$$\begin{aligned} E(1) = \mathcal{N}(A - I) &= \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 = x_2 = -x_3,\ x_3 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(-x_3, -x_3, x_3) \ :\ x_3 \in \mathbb{R}\} = \big\langle(-1, -1, 1)\big\rangle. \end{aligned}$$

- Logo $E(1) = \langle(-1, -1, 1)\rangle$. Uma base para $E(1)$ é portanto $\{(-1, -1, 1)\}$, tendo-se $\text{m.g.}(1) = \dim E(1) = 1$ (número de vetores da base).
- Geometricamente $E(1)$ define a reta de $\mathbb{R}^3$ que passa na origem com vetor diretor $(-1, -1, 1)$.
- Os vetores próprios de A associados ao valor próprio $\lambda = 1$ são os vetores <u>não nulos</u> de $E(1)$, isto é, os vetores da forma, $(-x_3, -x_3, x_3)$ com $x_3 \neq \mathbb{R}$.

Quadro-resumo com a informação espectral de uma matriz

A informação obtida nos slides anteriores sobre os valores próprios e respetivos subespaços próprios da matriz retirada do 2º teste de 8 de janeiro de 2024 (slide 230),

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

dita **informação espectral** de A, pode ser organizada numa tabela da seguinte forma:

λ	m.a.(λ)	m.g.(λ)	base de $E(\lambda)$
1	2	1	$\{(-1,-1,1)\}$
2	1	1	$\left\{\left(-\frac{1}{2},0,1\right)\right\}$

Informação espectral - exercício

Exercício

Verifique que a informação espectral relativa à matriz do slide 240,

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

pode ser organizada como no quadro-resumo seguinte:

λ	m.a.(λ)	m.g.(λ)	base de $E(\lambda)$
-1	2	2	$\{(1,0,0),(0,0,1)\}$
3	1	1	$\{(1,4,1)\}$

Conceitos e resultados fundamentais vistos até agora :)

Resumo

- Reconhecer / verificar que $v \neq \vec{0}$ é vetor próprio de A
  $\longrightarrow$ Mostrar que $Av = \lambda v$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$.
  λ é o valor próprio associado a v.

- Determinar os vetores próprios de A associados ao valor próprio λ
  $\longrightarrow$ Determinar os vetores <u>não nulos</u> de $E(\lambda) = \mathcal{N}(A - \lambda I)$.
  A multiplicidade geométrica de λ é m.g.$(\lambda) = \dim E(\lambda)$.

- Reconhecer / verificar que $\alpha \in \mathbb{R}$ é valor próprio de A
  $\longrightarrow$ Mostrar que $p_A(\alpha) = det(A - \alpha I) = 0$.

- Determinar os valores próprios de A
  $\longrightarrow$ Determinar as raízes (reais e complexas) de $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$.
  A multiplicidade algébrica de cada valor próprio λ, m.a.(λ),
  é o número de vezes que λ aparece repetido como raíz na
  factorização do polinómio característico $p_A(\lambda)$.

Propriedades dos valores próprios

Teorema

Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Então:

- Para todo o valor próprio λ de A tem-se

$$\boxed{1 \leq \text{m.g.}(\lambda) \leq \text{m.a.}(\lambda)}$$

- A matriz A possui n valores próprios (reais e/ou complexos) contando com repetições, ou seja, a soma das multiplicidades algébricas dos valores próprios **distintos** de A é igual à ordem da matriz A.
- A soma dos valores próprios de A, contando com repetições (m.a.), é igual ao traço de A, $\text{tr}(A)$, que se define como a soma dos elementos da diagonal principal de A.
- O produto dos valores próprios de A, contando com repetições (m.a.), é igual ao $\det A$. Em particular,

$$\boxed{\lambda = 0 \text{ valor próprio de } A \Leftrightarrow \ \det(A) = 0 \ \Leftrightarrow \ A \text{ não invertível.}}$$

Propriedades dos valores próprios - exemplo

Voltando à matriz A do exemplo do slide 230 e recordando a respectiva informação espectral do slide 243,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

λ	m.a.(λ)	m.g.(λ)	base de $E(\lambda)$
1	2	1	$\{(-1,-1,1)\}$
2	1	1	$\{(-1/2,0,1)\}$

Constata-se que:

- $1 = \text{m.g.}(1) \leq \text{m.a.}(1) = 2$
  $1 = \text{m.g.}(2) \leq \text{m.a.}(2) = 1.$
- $\text{m.a.}(1) + \text{m.a.}(2) = 2 + 1 = 3 = n$ (ordem da matriz A).
- A soma dos valores próprios de A contando com repetições (m.a.), $1 + 1 + 2 = 4$, coincide com o $tr(A) = 2 + 0 + 2 = 4$ (soma das entradas da diagonal principal).
- O produto dos valores próprios de A, contando com repetições (m.a.), $1 \times 1 \times 2$ coincide com $\det(A) = 2$ (verifique).
- Como $\lambda = 0$ não é valor próprio a matriz A é invertível.

A relação $AP = PD$

Sejam A matriz quadrada de ordem n. Recordemos que $v \neq \vec{0}$ é vetor próprio de A associado ao valor próprio $\lambda \in \mathbb{R}$ se $Av = \lambda v$. Suponhamos agora que temos k vetores próprios $v_1, \ldots, v_k$ de A associados a k valores próprios (que podem ser repetidos) $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, isto é, que temos as relações,

$$Av_i = \lambda_i\, v_i, \qquad i = 1, \ldots, k. \tag{2}$$

Podemos escrever as k relações anteriores de uma forma bastante conveniente usando a notação matricial. Para isso vamos designar $P = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_k \end{bmatrix}$ a matriz dos vetores próprios e

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 e_1 & \lambda_2 e_2 & \cdots & \lambda_k e_k \end{bmatrix},$$

a matriz diagonal dos respetivos valores próprios, onde $e_1, \ldots, e_k$, são as k as colunas da matriz identidade de ordem k, I_k. Tem-se então a equivalência,

$$\left.\begin{array}{c} Av_1 = \lambda_1 v_1 \\ \vdots \\ Av_k = \lambda_k v_k \end{array}\right\} \quad \Leftrightarrow \quad AP = PD. \tag{3}$$

A relação $AP = PD$

De facto, tem-se por um lado,

$$AP = A \begin{bmatrix} v_1 & \cdots & v_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Av_1 & \cdots & Av_k \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} PD &= P \begin{bmatrix} \lambda_1 e_1 & \cdots & \lambda_k e_k \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} P(\lambda_1 e_1) & \cdots & P(\lambda_k e_k) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda_1 P e_1 & \cdots & \lambda_k P e_k \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda_1 v_1 & \cdots & \lambda_k v_k \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{5}$$

uma vez que Pe_j corresponde à j-ésima coluna de P, que é v_j (ver o slide 81). Das relações (4) e (5) conclui-se imediatamente a equivalência (3) do slide anterior.

Exemplo

Consideremos $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ do slide 247 e os vetores $v_1 = (-1, -1, 1) \in E(1)$ e $v_2 = (-\frac{1}{2}, 0, 1) \in E(2)$.

Seja $P = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Tem-se,

$$AP = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

e

$$PD = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Como $AP = PD$, temos as relações $\begin{cases} Av_1 & = & 1\, v_1, \\ Av_2 & = & 2\, v_2, \end{cases}$ que signficam que v_1 e v_2 são vetores próprios de A associados aos valores próprios $\lambda = 1$ e $\lambda = 2$, respetivamente.

Caso P invertível

Observação

Quando P for invertível, isto é, quando $k = n$ e $\{v_1, \ldots, v_n\}$ for uma base de $\mathbb{R}^n$ formada por vetores próprios de A, a relação

$$AP = PD,$$

pode ser escrita de duas formas distintas consoante o objetivo pretendido:

- $AP = PD \Leftrightarrow P^{-1}(AP) = P^{-1}(PD) \Leftrightarrow \boxed{P^{-1}AP = D}$,

  que significa que diagonalizámos a matriz A e que nos leva ao conceito de matriz diagonalizável do próximo slide.

- $AP = PD \Leftrightarrow (AP)P^{-1} = (PD)P^{-1} \Leftrightarrow \boxed{A = PDP^{-1}}$,

  que permite reconstruir a matriz A a partir da sua informação espectral (vetores e valores próprios de A) e que será abordada mais à frente, no slide 257.

Diagonalização de matrizes

Definição de matriz diagonalizável

Uma matriz A de ordem n diz-se diagonalizável se existir uma matriz invertível P e uma matriz diagonal D tal que

$$P^{-1} A P = D.$$

A matriz P designa-se por matriz de diagonalização para A.

- Pelos resultados do slide anterior A ser diagonalizável é equivalente à existência de uma base de $\mathbb{R}^n$ formada por vetores próprios de A, que designaremos por base própria associada a A.
- Nessa altura uma matriz de diagonalização P é a matriz dessa base de vetores próprios e a correspondente matriz diagonal D contém na diagonal principal os valores próprios associados a esses vetores próprios, pela mesma ordem.

Construção de bases próprias associadas a uma matriz

Observações

Seja A matriz de ordem n com valores próprios distintos $\lambda_1', \ldots, \lambda_k'$. Tem-se:

- Os vetores de uma base própria associada à matriz A têm que vir dos subespaços próprios $E(\lambda_1'), \ldots, E(\lambda_k')$.
- Prova-se que a reunião de bases dos subespaços $E(\lambda_1'), \ldots, E(\lambda_k')$ é um conjunto linearmente independente de vetores.
- O conjunto l.i. anterior possui $\text{m.g.}(\lambda_1') + \cdots + \text{m.g.}(\lambda_k')$ vetores logo define uma base base própria de $\mathbb{R}^n$ se e só se

$$\text{m.g.}(\lambda_1') + \cdots + \text{m.g.}(\lambda_k') = n.$$

- Podemos substituir a condição anterior pela condição

$$\text{m.g.}(\lambda_i') = \text{m.a.}(\lambda_i'), \quad i = 1, \ldots, k,$$

  uma vez que soma das multiplicidades algébricas dos valores próprios distintos de A é sempre igual à ordem da matriz A e a multiplicidade geométrica de qualquer valor próprio é sempre inferior ou igual à sua multiplicidade algébrica.

Critérios de diagonalização

Podemos resumir as considerações dos slides anteriores no seguinte resultado.

Teorema

Seja A matriz de ordem n. As seguintes afirmações são equivalentes:

(i) A é diagonalizável.

(ii) Existe uma base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ formada por vetores próprios de A, obtida reunindo bases de todos subespaços próprios de A.

(iii) A soma das multiplicidades geométricas dos valores próprios de A é n.

(iv) $\text{m.g.}(\lambda) = \text{m.a.}(\lambda)$ para qualquer valor próprio λ de A.

Nas condições equivalentes acima a matriz da base própria, $P = [\, v_1 \ \cdots \ v_n \,]$, é uma matriz de diagonalização para A, tendo-se

$$P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n),$$

com λ_i, $i = 1, \ldots, n$, valores próprios de A (que podem ser repetidos) associados aos vetores próprios v_i, $i = 1, \ldots, n$.

Exemplo de uma matriz diagonalizável

Consideremos a matriz A do exercício do slide 244 e resp. informação espectral,

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

λ	$m.a.(\lambda)$	$m.g.(\lambda)$	base de $E(\lambda)$
-1	2	2	$\{(1,0,0),(0,0,1)\}$
3	1	1	$\{(1,4,1)\}$

- Uma vez que m.g.(1) = m.a.(1) = 2 e a m.g.(2) = m.a.(2) = 1, a matriz A é diagonalizável e o conjunto de vetores

$$\{u_1, u_2, u_3\} = \{(1,0,0,),(0,0,1),(1,4,1)\},$$

obtido reunindo a base $\{(1,0,0),(0,0,1)\}$ de $E(-1)$ com a base $\{(1,4,1)\}$ de $E(3)$ é uma base de $\mathbb{R}^3$ formada por vetores próprios de A.

- Logo a matriz desta base própria, $P = [\, u_1 \;\; u_2 \;\; u_3 \,] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ é uma matriz de diagonalização para A, tendo-se (verifique),

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & -1/4 & 0 \\ 0 & -1/4 & 1 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Exemplo de uma matriz não diagonalizável

Consideremos a matriz A e a respetiva informação espectral do slide 243,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

λ	m.a.(λ)	m.g.(λ)	base de $E(\lambda)$
1	2	1	$\{(-1,-1,1)\}$
2	1	1	$\{(-1/2,0,1)\}$

- Como m.g.(1) $\neq$ m.a.(1) não existe uma base de $\mathbb{R}^3$ formada por vetores próprios de D e portanto A é não diagonalizável.
- Neste caso a cardinalidade (número de vetores) máxima de um conjunto linearmente independente formado por vetores próprios de A é m.g.(1) + m.g.(2) $= 2 < 3 = \dim \mathbb{R}^3$.

E para terminar...

Reconstrução de uma matriz diagonalizável a partir da informação espectral

Determinar a matriz A a partir da informação espectral dada na seguinte tabela

λ	$m.a.(\lambda)$	$m.g.(\lambda)$	base de $E(\lambda)$
-3	2	2	$\{(0,1,0),(1,1,-1)\}$
2	1	1	$\{(1,-1,0)\}$

Resolução:

- A é diagonalizável pois $m.g(-3) = m.a.(-3)$ e $m.g(2) = m.a.(2)$.
- Reunindo as bases dos subespaços próprios de $E(-3)$ e $E(2)$ dadas na tabela, obtém-se a base de $\mathbb{R}^3$ formada por vetores próprios de A (base própria),

$$\{v_1, v_2, v_3\} = \{\underbrace{(0,1,0)\,,\,(1,1,-1)}_{\text{base de } E(-3)}\,,\,\underbrace{(1,-1,0)}_{\text{base de } E(2)}\}.$$

- Sejam $P = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$ matriz da base própria e $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ matriz diagonal que contém os correspondentes valores próprios $\lambda_1 = \lambda_2 = -3$, $\lambda_3 = 2$.
- Calculando P^{-1} e usando a relação $A = PDP^{-1}$ (ver o slide 251), obtém-se,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ -5 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

$$\text{BOM } \mathcal{N}(A^TAL)!$$

com $A_{25\times 12}$ e $L_{12\times 2025}$