

INSTITUTO SUPERIOR DE AGRONOMIA

2º Teste de Época de Álgebra Linear

5 de janeiro de 2026 - Duração: 2h

Guarde **todos os equipamentos eletrônicos**, incluindo telemóveis, calculadoras e *smartwatches* na mala/mochila fechada ou coloque-os na secretária do docente.

Não é permitido escrever no enunciado para além do preenchimento do nome e do número de aluno.

O incumprimento das regras anteriores leva à **anulação da prova**.

Apresente os cálculos que efetuar e justifique todas as respostas.

Número:

Nome:

Cotação (não preencher)

1a)	1b)	1c)	1d)	2a)	2b)	2c)	2d)	3	4a)	4b)	4c)	Total
2.5	2.5	1.25	1.25	1	2.75	1.75	0.75	1.75	1	2	1.5	20

Atenção: os dados relativos às questões **1.** e **2.** encontram-se abaixo. No início da resolução de cada uma dessas questões, comece por copiar os dados que dizem respeito à questão para o caderno de teste.

1. Considere $U = \langle (1, 1, 0, 1), (0, 1, 1, 2), (-1, 1, 2, 3) \rangle$, $b = (0, 4, 1, -1)$ e $w = (1, 0, 2, -1)$.

2. Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ e $v = (1, 1, 1)$.

- [7.5v] 1. a) Determine uma base ortogonal de U e indique a dimensão de U .
 b) Calcule $\text{proj}_U(b)$ e indique a distância de b a U .
 c) Mostre que $w \in U^\perp$.
 d) Indique um vetor $c \in \mathbb{R}^4$ com $c \notin U^\perp$ e um vetor não nulo $q \in U^\perp$ tal que $(c - q) \in U$.
- [6.25v] 2. a) Mostre que v é vetor próprio de A e indique o valor próprio correspondente.
 b) Determine os valores próprios de A e indique as respectivas multiplicidades algébricas e geométricas.
 c) Determine todos os vectores próprios de A associados a um valor próprio de A à sua escolha.
 d) Existirá uma matriz invertível P e uma matriz diagonal D tal que $AP = PD$?
- [1.75v] 3. Uma exploração agrícola dispõe de 100 hectares de terreno para produzir trigo, cevada e ervilha. Cada tipo de cultura requer quantidades distintas de trabalho e de água e ocupa uma área de terreno com limites mínimo e máximo. Por questões de rotação e fertilidade do solo, pelo menos 30% da área total ocupada pelas culturas deve estar afetada às leguminosas (ervilha). Os dados por hectare para cada tipo de cultura encontram-se na tabela seguinte:

Cultura	Lucro (€/ha)	Trabalho (h/ha)	Água (m ³ /ha)	Área mínima (ha)	Área máxima (ha)
Trigo	450	9	1100	10	60
Cevada	400	7	900	5	50
Ervilha	300	6	600	0	40

A exploração dispõe de 800 horas de trabalho e 90000 m³ de água. Pretende-se determinar a área a destinar a cada cultura respeitando as restrições anteriores por forma a maximizar o lucro. Formule o problema em termos de programação linear atribuindo significado às variáveis.

- [4.5v] 4. Considere o seguinte problema em programação linear na forma *standard*, em que f_1 , f_2 e f_3 são as variáveis de folga:

$$\begin{aligned}
 \max \quad & z = 3x_1 + 2x_2 \\
 \text{s. a} \quad & x_1 + x_2 - f_1 = 4 \\
 & 2x_1 + x_2 + f_2 = 10 \\
 & x_1 + f_3 = 4 \\
 & x_1, x_2, f_1, f_2, f_3 \geq 0.
 \end{aligned}$$

- a) Indique uma formulação equivalente do problema em programação linear sem usar as variáveis de folga.
- b) Indique uma solução ótima do problema da alínea anterior.
- c) Averigue se $(x_1, x_2, f_1, f_2, f_3) = (4, 2, 2, 0, 0)$ é uma solução básica admissível do problema na forma *standard*.