**INSTITUTO SUPERIOR DE AGRONOMIA**

1ª Chamada do Exame de Álgebra Linear

5 de janeiro de 2026 - Duração: 2h30

Guarde **todos os equipamentos eletrónicos**, incluindo telemóveis, calculadoras e *smartwatches* na mala/mochila fechada ou coloque-os na secretária do docente.
**Não é permitido escrever no enunciado** para além do preenchimento do nome e do número de aluno.
O incumprimento das regras anteriores leva à **anulação da prova**.

**Apresente os cálculos que efetuar e justifique todas as respostas.**

Número: Nome:

Cotação (não preencher)

| **1a)** | **1b)i** | **1b)ii** | **1c)** | **1d)** | **1e)i** | **1e)ii** | **2** | **3** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1.75 | 0.5 | 0.75 | 0.75 | 1.5 | 1 | 1.25 | 1 | 1.5 |

| **4a)** | **4b)** | **4c)** | **5a)** | **5b)** | **5c)** | **6** | **7a)** | **7b)** | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.75 | 1.5 | 1.5 | 1.75 | 1 | 0.5 | 1 | 0.75 | 1.25 | 20 |

**Atenção:** os dados relativos às questões **1.**, **4.** e **5.** encontram-se abaixo. No início da resolução de cada uma dessas questões, comece por copiar os dados que dizem respeito à questão para o caderno de teste.

**1.** Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1+\alpha & 2 \\ \alpha & 2\alpha+1 & \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ \beta \end{bmatrix}$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

**4.** Considere $U = \big\langle (1,1,0,1), (0,1,1,2), (-1,1,2,3) \big\rangle$, $w = (1,0,2,-1)$ e $b = (0,4,1,-1)$.

**5.** Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

[7.5v] **1.** a) Classifique o sistema $Ax = b$ para todos os valores de $\alpha$ e $\beta$.

b) Indique os valores de $\alpha$ para os quais:

*i)* $\{v_1, v_2, v_3\}$ é linearmente independente.

*ii)* $\mathcal{C}(A)$ define um plano em $\mathbb{R}^3$.

c) Indique os valores de $\alpha$ e $\beta$ para os quais $\langle v_1, v_2, v_3, b\rangle = \mathbb{R}^3$.

d) Considere $\alpha = 0$ e determine a inversa de $A$.

e) No que se segue assuma $\alpha = 2$.

*i)* Considere $\beta = 2$ e escreva $b$ como combinação linear de $v_1$, $v_2$ e $v_3$ de duas formas distintas.

*ii)* Indique uma base de $\mathbb{R}^3$ que contenha uma base de $\mathcal{C}(A)$.

[1v] **2.** Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ uma transformação linear tal que $T(1,0) = (1,1,1)$ e $T(0,1) = (2,3,1)$.
Determine $T(x,y)$ para todo o $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

[1.5v] **3.** Considere $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^n$ e $V = \langle v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_3 - v_1\rangle$. Justifique que $\dim V \leq 2$.

[3.75v] **4.** a) Mostre que $w \in U^\perp$.

b) Determine uma base ortogonal de $U$ e indique a dimensão de $U$.

c) Calcule $\mathrm{proj}_U(b)$ e indique a distância de $b$ a $U$.

[3.25v] **5.** a) Determine os valores próprios de $A$ e indique as respectivas multiplicidades algébricas e geométricas.

b) Determine todos os vectores próprios de $A$ associados a um valor próprio de $A$ à sua escolha.

c) Existirá uma matriz invertível $P$ e uma matriz diagonal $D$ tal que $AP = PD$?

[1v] **6.** Uma exploração agrícola dispõe de 100 hectares de terreno para produzir trigo, cevada e ervilha. Cada tipo de cultura requer quantidades distintas de trabalho e de água e ocupa uma área de terreno com limites mínimo e máximo. Por questões de rotação e fertilidade do solo, pelo menos 30% da área total ocupada pelas culturas deve estar afetada às leguminosas (ervilha). Os dados por hectare para cada tipo de cultura encontram-se na tabela seguinte:

| Cultura | Lucro (€/ha) | Trabalho (h/ha) | Água ($m^3$/ha) | Área mínima (ha) | Área máxima (ha) |
|---|---|---|---|---|---|
| Trigo | 450 | 9 | 1100 | 10 | 60 |
| Cevada | 400 | 7 | 900 | 5 | 50 |
| Ervilha | 300 | 6 | 600 | 0 | 40 |

A exploração dispõe de 800 horas de trabalho e 90000 $m^3$ de água. Pretende-se determinar a área a destinar a cada cultura respeitando as restrições anteriores por forma a maximizar o lucro. Formule o problema em termos de programação linear atribuindo significado às variáveis.

[2v] **7.** Considere o seguinte problema em programação linear na forma *standard*, em que $f_1$, $f_2$ e $f_3$ são as variáveis de folga:

$$\begin{array}{lrcl}
\max & z = 3x_1 + 2x_2 & & \\
\text{s. a} & x_1 + x_2 - f_1 & = & 4 \\
& 2x_1 + x_2 + f_2 & = & 10 \\
& x_1 + f_3 & = & 4 \\
& x_1,\ x_2,\ f_1,\ f_2,\ f_3 & \geq & 0.
\end{array}$$

a) Indique uma formulação equivalente do problema em programação linear sem usar variáveis de folga.

b) Justifique que $(x_1, x_2) = (4, 1)$ é uma solução admissível do problema da alínea anterior, indique a correspondente solução do problema na forma *standard* e averigue se essa solução é básica admissível.